**Un ejemplo de descomposición primaria**

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

[No es difícil ver que el polinomio caracteristico es $X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 = \left(X + X^2 + 1\right)(X-1)^3$, pero no lo vamos a usar.]

Hallamos el minimal de $A$:

- $Ae_1 = e_2 \to A^2e_1 = e_3 \to A^3e_1 = e_1 \to m_{e_1} = X^3 - 1$
- $Ae_2 = e_3 \to A^2e_2 = e_1 \to A^3e_2 = Ae_1 = e_2 \to m_{e_2} = X^3 - 1$
- $Ae_3 = e_1 \to A^2e_3 = e_2 \to A^3e_3 = Ae_2 = e_3 \to m_{e_3} = X^3 - 1$
- $Ae_4 = e_4 \to m_{e_4} = X - 1$
- $Ae_5 = e_1 - e_3 + e_5 \to A^2e_5 = e_2 - e_1 + e_1 - e_3 + e_5 = e_2 - e_3 + e_5 \to A^3e_5 = e_3 - e_1 + e_1 - e_3 + e_5 = e_5 \to m_{e_5} = X^3 - 1$

Luego $m_A = X^3 - 1 = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Hay que buscar bases de $\ker(A-1)$ y de $\ker(A^2 + A + 1)$:

- $\ker(A - \mathrm{Id}) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  y su núcleo es: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

- $\ker(A^2 + A + \mathrm{Id}) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

  $\ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, y su núcleo $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Luego, la base $\mathfrak{B}$ en la que se parte en bloques la matriz $A$ es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz cambio de base que entra en la base $\mathfrak{B}$ y sale en la canónica es: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuya inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Calculando $P^{-1}AP$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observar que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene forma en bloques $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ con $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Además $m_C = (X-1)$ y $m_D = X^2 + X + 1$.

---

**Ejemplo del cálculo de un vector cíclico**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, se busca un vector $w \in \mathbb{R}^5$ tal que $m_w = m_A$.

Desarrollando en orden por la quinta columna, por la cuarta y por la segunda queda que el polinomio característico es $(X-3)(X-1)(X+2)(X^2-2x+1) = (X-3)(X+2)(X-1)^3$

Luego el polinomio minimal debe de la forma $(X-3)(X+2)(X-1)^k$, donde $k$ toma algún valor entre $1, 2, 3$. Tratemos de calcular este polinomio minimal hallando los minimales de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^5$. Se tiene:

- $Ae_1 = 2e_1 + e_3 \to A^2e_1 = 2(2e_1+e_3) - e_1 = 3e_1 + 2e_3 = 2Ae_1 - e_1 \to m_{e_1} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
- $Ae_2 = -2e_2 - 5e_5 \to A^2e_2 = -2(-2e_2 - 5e_5) - 5(3e_5) = 4e_2 - 5e_5 = Ae_2 + 6e_2 \to m_{e_2} = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$
- $Ae_3 = -e_1 \to A^2e_3 = -2e_1 - e_3 = 2Ae_3 - e_3 \to m_{e_3} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
- $Ae_4 = e_4 \to m_{e_4} = X - 1$
- $Ae_5 = 3e_5 \to m_{e_5} = X - 3$

Por lo tanto $m_A = (X-1)^2(X+2)(X-3)$.

Para hallar el vector cíclico $w$ busquemos $v_1, v_2, v_3$ tales que sus minimales sean respectivamente $(X-1)^2$, $(X+2)$ y $(X-3)$:

- $v_1$ debe tener minimal $(X-1)^2$, se puede tomar $v_1 = e_1$.
- $v_2$ debe tener minimal $(X+2)$ por lo que basta buscar el autoespacio asociado al $-2$, o sea calcular $\ker(A+2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ que da por resultado el subespacio generado por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$
- $v_3$ debe tener minimal $(X-3)$ por lo que se puede tomar $v_3 = e_5$.

De acuerdo al Teorema visto en clase, el vector $w = v_1 + v_2 + v_3 = (1,1,0,0,2)$ cumple que su minimal es el minimal de la matriz.
Comprobemos este hecho: es suficiente ver que el minimal de $w$ es de grado 4 (que es el grado de $m_A$):

- $Aw = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A^2w = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$

- $A^3w = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 3 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$

Pero la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 13 & 19 \end{pmatrix}$ tiene rango 4 y entonces $w, Aw, A^2w, A^3w$ son l.i. y por lo tanto el grado de $m_w$ debe ser al menos 4, pero como divide a $m_A$ debe ocurrir necesariamente que $m_w = m_A$.

Por último, veamos la forma de la matriz semejante en una base que contenga a los vectores $w, Aw, A^2w, A^3w$, completando a una base de $\mathbb{R}^5$, por ejemplo con $e_4$ (que claramente es linealmente independiente de estos cuatro).

Llamando $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 13 & 19 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{30} & -\frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{11}{36} & -\frac{1}{180} & \frac{19}{36} & 0 & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & -\frac{13}{180} & -\frac{5}{36} & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Haciendo el cambio de base $P^{-1}AP$ queda:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{30} & -\frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{11}{36} & -\frac{1}{180} & \frac{19}{36} & 0 & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & -\frac{13}{180} & -\frac{5}{36} & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 13 & 19 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el polinomio $m_A = (X-1)^2(X+2)(X-3) = 11X - 3X^2 - 3X^3 + X^4 - 6$, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no es otra que la matriz compañera del minimal.

En este ejemplo, además, el subespacio generado por el $e_4$ resulta un complemento estable del cíclico generado por $w$, pero eso fue casualidad, en general solo se puede asegurar que quedará un matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & * \\ 1 & 0 & 0 & -11 & * \\ 0 & 1 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 1 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Ejemplo del cálculo de un complemento al subespacio generado por un vector cíclico**

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Su polinomio característico es

$$X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 = \left(X + X^2 + 1\right)(X-1)^3 = (X^3-1)(X-1)^2$$

Para calcular el polinomio minimal consideramos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, tenemos $Ae_1 = e_2$ , $A^2e_1 = Ae_2 = e_3$ , $A^3e_1 = A^2e_2 = e_1$ entonces el minimal de $e_1$ es $X^3 - 1$. Los minimales de $e_2$ y $e_3$ no interesan porque están en el cíclico generado por $e_1$. El minimal de $e_4$ es claramente $X - 1$. Veamos el minimal de $e_5$:

- $Ae_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $A^2e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $A^3e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

De donde, el minimal de $e_5$ es también $X^3 - 1$. Se concluye que el minimal de $A$ es $X^3 - 1$.

Sea $S$ el subespacio cíclico generado por $e_1$, o sea, $S = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. La matriz de $A^*$ restringida a $S$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (en la base dual de la base canónica de $S$).

Un vector cíclico para esta matriz es por ejemplo $e_1^*$ y a este llamamos $\varphi_0$. Calculemos $\langle \overline{\varphi_0} \rangle_A$: en coordenadas la dual de la canónica se tiene:

$$A^*\overline{\varphi_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3^* + e_5^*$$

$$A^*(e_3^* + e_5^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2^*$$

$$A^*(e_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1^* = \overline{\varphi_0}$$

De donde $\langle \overline{\varphi_0} \rangle_A = \langle e_1^*, e_3^* + e_5^*, e_2^* \rangle$.

Finalmente $T$ es el anulador de $\langle e_1^*, e_3^* + e_5^*, e_2^* \rangle$, o sea las soluciones del sistema homogéneo con matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El espacio solución resulta el generado por los vectores $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Veamos que es estable:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El complemento estable del subespacio cíclico generado por $e_1$ es entonces el generado por $v_4$ y $v_5$. Si consideramos la base $\{e_1, e_2, e_3, v_4, v_5\}$, y se multiplica la matriz $A$ por los cambios de base $P^-1$ y $P$, siendo

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz producto $P^{-1}AP$ queda en forma de bloques:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---