

# Transformaciones Lineales y Espacio Dual

Juan Pablo De Rasis

22 de abril de 2018

El presente artículo tiene como objetivo la exposición de soluciones a problemas de Álgebra Lineal concernientes a transformaciones lineales y espacio dual, con vistas a desarrollar e interiorizar ideas que resultan útiles a la hora de encarar ejercicios complejos. Pensaremos y resolveremos problemas obtenidos de exámenes parciales y finales tomados en la materia de Álgebra Lineal en el Departamento de Matemática de la Universidad de Buenos Aires, como así también algunos problemas de olimpiadas universitarias.

## 1 Transformaciones Lineales

Sean  $m$  y  $n$  dos números naturales y sea  $K$  un cuerpo. Dados dos  $K$ -espacios vectoriales  $V$  y  $W$  de dimensiones  $n$  y  $m$  respectivamente, fijando una base  $B$  de  $V$  y una base  $B'$  de  $W$  tenemos un isomorfismo lineal  $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$  dado por  $f \mapsto |f|_{BB'}$ . Esta identificación entre matrices y transformaciones lineales nos permite traducir problemas matriciales en problemas de transformaciones lineales, y viceversa. Esta idea puede explotarse para resolver problemas como el siguiente.

**Ejemplo 1.1** (De parcial) *Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $K$  un cuerpo. Se tienen dos matrices  $A$  y  $B$  en  $K^{n \times n}$  tales que  $AB = 0$ . Demostrar que  $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n$ .*

*Solución.* Sea  $f_A : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal dada por  $f_A(v) = Av$  para todo  $v \in K^n$ . Análogamente, sea  $f_B : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal dada por  $f_B(v) = Bv$  para todo  $v \in K^n$ .

Como  $AB = 0$ , para todo  $v \in K^n$  se tiene  $f_A(f_B(v)) = f_A(Bv) = ABv = 0v = 0$ . Esto nos permite concluir que  $\text{Im}(f_B) \subseteq \text{Nu}(f_A)$ . Por lo tanto  $\dim(\text{Im}(f_B)) \leq \dim(\text{Nu}(f_A))$ . Por el **Teorema de la Dimensión** se tiene  $\dim(\text{Nu}(f_A)) = n - \dim(\text{Im}(f_A))$ , con lo cual

$$\dim(\text{Im}(f_B)) \leq n - \dim(\text{Im}(f_A)) \iff \dim(\text{Im}(f_A)) + \dim(\text{Im}(f_B)) \leq n$$

Pero esto es exactamente lo que queríamos probar, ya que la dimensión de la imagen de una transformación lineal coincide con el rango de su matriz asociada. ■

Esta idea puede extenderse para obtener un resultado más general, conocido como la *desigualdad de Sylvester*.

**Ejemplo 1.2** (De final) *Sean  $m, n, \ell \in \mathbb{N}$  y  $K$  un cuerpo. Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times \ell}$ . Demostrar que  $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n + \text{rg}(AB)$ .*

*Solución.* Sea  $f_A : K^n \rightarrow K^m$  la transformación lineal dada por  $f_A(v) = Av$  para todo  $v \in K^n$ . Análogamente, sea  $f_B : K^\ell \rightarrow K^n$  la transformación lineal dada por  $f_B(w) = Bw$  para todo  $w \in K^\ell$ . Entonces  $f_A \circ f_B : K^\ell \rightarrow K^m$  es la transformación lineal cuya matriz asociada es  $AB \in K^{m \times \ell}$ .

Definimos  $\widehat{f}_B := f_B|_{\text{Nu}(f_A \circ f_B)} : \text{Nu}(f_A \circ f_B) \rightarrow K^n$ , es decir,  $\widehat{f}_B$  es la restricción de  $f_B$  al subespacio  $\text{Nu}(f_A \circ f_B)$ .

Afirmamos que  $\text{Im}(\widehat{f}_B) \subseteq \text{Nu}(f_A)$ . En efecto, dado  $x \in \text{Im}(\widehat{f}_B)$ , se tiene que  $x = Bv$  para algún  $v \in \text{Nu}(f_A \circ f_B)$ , luego  $0 = ABv = Ax$ , de donde  $x \in \text{Nu}(f_A)$ . Tomando dimensión, obtenemos que  $\dim(\text{Im}(\widehat{f}_B)) \leq \dim(\text{Nu}(f_A))$ .

Afirmamos también que  $\text{Nu}(\widehat{f}_B) \subseteq \text{Nu}(f_B)$ . En efecto, si  $y \in \text{Nu}(\widehat{f}_B)$ , entonces  $0 = \widehat{f}_B(y) = By$ , de donde  $y \in \text{Nu}(f_B)$ . Así,  $\dim(\text{Nu}(\widehat{f}_B)) \leq \dim(\text{Nu}(f_B))$ .

Aplicando el **Teorema de la Dimensión** a la función  $\widehat{f}_B$ , se tiene que

$$\dim(\text{Nu}(f_A \circ f_B)) = \dim(\text{Im}(\widehat{f}_B)) + \dim(\text{Nu}(\widehat{f}_B)) \leq \dim(\text{Nu}(f_A)) + \dim(\text{Nu}(f_B))$$

Concluimos que  $\dim(\text{Nu}(f_A \circ f_B)) \leq \dim(\text{Nu}(f_A)) + \dim(\text{Nu}(f_B))$ . Usando ahora el **Teorema de la Dimensión** en las funciones  $f_A \circ f_B$ ,  $f_A$  y  $f_B$  obtenemos

$$\ell - \text{rg}(AB) \leq (n - \text{rg}(A)) + (\ell - \text{rg}(B))$$

$$\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n + \text{rg}(AB)$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Para finalizar con Transformaciones Lineales, resolveremos un desafiante ejercicio tomado de una olimpiada universitaria. Antes demostraremos un lema algebraico.

**Lema 1.3** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$ .

*Demostración.* Sean

$$A := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq i\}$$

$$B := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n \wedge j \leq i \leq n\}$$

Afirmamos que  $A = B$ .

En efecto, dado  $(i, j) \in A$ , se tiene  $1 \leq j \leq i$  y  $i \leq n$ , de donde  $1 \leq j \leq i \leq n$ . Por consiguiente  $1 \leq j \leq n$  y  $j \leq i \leq n$ , luego  $(i, j) \in B$ . Concluimos que  $A \subseteq B$ .

Recíprocamente, dado  $(i, j) \in B$ , se tiene  $1 \leq j$  y  $j \leq i \leq n$ , de donde  $1 \leq j \leq i \leq n$ . Por consiguiente  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq i$ , de donde  $(i, j) \in A$  y por lo tanto  $B \subseteq A$ .

De esta forma,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in B} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

como queríamos. ■

**Ejemplo 1.4** (Problema 2 de la I Olimpiada Colombiana de Matemática Universitaria). Sea  $K$  un cuerpo y  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Sea  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$  un subconjunto de  $V$  tal que  $x_1 \neq 0$  y tal que existe una transformación lineal  $\varphi : V \rightarrow V$  que satisfice

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^i x_j$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Demostrar que  $A$  es un conjunto linealmente independiente.

*Solución.* Demostraremos por inducción que para todo  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$A_n := \{x_n : n \in [1, n] \cap \mathbb{N}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

es linealmente independiente.

Para  $n = 1$  se tiene que  $A_1 = \{x_1\}$  es linealmente independiente, dado que  $x_1 \neq 0$  por hipótesis. Supongamos que para un  $n \in \mathbb{N}$  genérico el conjunto  $A_n$  es linealmente independiente. Veamos que  $A_{n+1}$  es linealmente independiente. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in K$  tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

Queremos ver que  $\alpha_i = 0$  para todo  $i \in [1, n+1] \cap \mathbb{N}$ . Aplicando  $\varphi$  a la igualdad y usando que  $\varphi(0) = 0$ , obtenemos

$$0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \sum_{j=1}^i x_j = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^i \alpha_i x_j$$

Usando el Lema 1.3 se tiene

$$0 = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i x_j = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i\right) x_j = \alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i\right) x_j$$

Reescribiendo la igualdad  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$  como  $\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$ , podemos resumir nuestros resultados en las siguientes dos igualdades:

$$\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$$

$$\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i\right) x_j = 0$$

Restándole la primera igualdad a la segunda, vemos que el término  $\alpha_{n+1} x_{n+1}$  se cancelará y obtendremos

$$0 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i\right) x_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=j}^{n+1} \alpha_i\right) - \alpha_j\right] x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j+1}^{n+1} \alpha_i\right) x_j$$

Por hipótesis inductiva el conjunto  $A_n$  es linealmente independiente, por lo tanto se tiene, para cada  $j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ , que

$$\sum_{i=j+1}^{n+1} \alpha_i = 0$$

Esto es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que está escalonado:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & + & \cdots & + & \alpha_{n-1} & + & \alpha_n & + & \alpha_{n+1} & = & 0 \\ & & \alpha_3 & + & \alpha_4 & + & \cdots & + & \alpha_{n-1} & + & \alpha_n & + & \alpha_{n+1} & = & 0 \\ & & & & \alpha_4 & + & \cdots & + & \alpha_{n-1} & + & \alpha_n & + & \alpha_{n+1} & = & 0 \\ & & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & & & & & & & \alpha_{n-1} & + & \alpha_n & + & \alpha_{n+1} & = & 0 \\ & & & & & & & & & & \alpha_n & + & \alpha_{n+1} & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \alpha_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

Luego la única solución es la trivial, es decir,  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$ . De la igualdad  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$  surge  $\alpha_1 x_1 = 0$ , y como  $x_1 \neq 0$  entonces  $\alpha_1 = 0$ . Concluimos que  $A_{n+1}$  es linealmente independiente.

Hemos demostrado que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  es linealmente independiente. Queremos demostrar que  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es linealmente independiente. Esto ocurre si y solo si cada subconjunto finito de  $A$  es linealmente independiente. Y como cada subconjunto finito de  $A$  está contenido en  $A_n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, entonces todo subconjunto finito de  $A$  es linealmente independiente. ■

Dejaremos como ejercicio para el lector el siguiente ejercicio, que es una variante del anterior, para poner en práctica las ideas utilizadas.

**Ejemplo 1.5** (Problema 2 de la Olimpiada Iberoamericana Matemática Universitaria, 2009) *Sea  $K$  un cuerpo y  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Sea  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$  un subconjunto de  $V$  tal que  $x_1 \neq 0$  y tal que existe una transformación lineal  $\varphi : V \rightarrow V$  que satisface  $\varphi(x_1) = x_1$  y  $\varphi(x_{k+1}) = x_{k+1} - x_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Demostrar que  $A$  es un conjunto linealmente independiente.*

## 2 Espacio dual

**Definición 2.1** *Para cada conjunto  $I$  y cada cuerpo  $K$ , definimos la función  $\delta : I \times I \rightarrow K$  como*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

donde notamos  $\delta_{ij} := \delta(i, j)$ . Esta función recibe el nombre de función delta de Kronecker.

La función delta de Kronecker sirve para dar una buena caracterización de las matrices canónicas en  $K^{n \times n}$ . En efecto, si  $E^{pq}$  es una de las matrices canónicas definidas, se tiene  $(E^{pq})_{ij} = \delta_{pi} \delta_{jq}$ . Además, la regla de multiplicación de matrices canónicas toma la siguiente forma:  $E^{pi} E^{jq} = \delta_{ij} E^{pq}$ .

Sabemos que dado  $n \in \mathbb{N}$ , un cuerpo  $K$  y un  $K$ -espacio vectorial  $V$   $n$ -dimensional, entonces dada una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ , tomando para todo  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$  la transformación lineal  $\varphi_i : V \rightarrow K$  definida en  $B$  como  $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$  para cada  $j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ , se tiene que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es una base de  $V^*$ .

Es natural preguntarse si este resultado puede extenderse a dimensión infinita. Dado un  $K$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión infinita, y fijada una base  $B = \{v_i : i \in I\}$  de  $V$ , entonces para todo  $i \in I$  podemos definir  $\varphi_i \in V^*$  en  $B$  como  $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$  para cada  $j \in I$ . Esto es,  $\varphi_i(v_j) = 0$  si  $i \neq j$ , y  $\varphi_i(v_i) = 1$ . ¿Es  $\{\varphi_i : i \in I\}$  una base de  $V^*$ ? El siguiente ejercicio responde esta interrogante.

**Ejemplo 2.2** (De final) *Sea  $K$  un cuerpo y sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión infinita. Sea  $B = \{v_i : i \in I\}$  una base de  $V$ . Para cada  $i \in I$  definimos la transformación lineal  $\varphi_i : V \rightarrow K$  tal que  $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$  para todo  $j \in I$ . Demostrar que  $\{\varphi_i : i \in I\}$  no es una base de  $V^*$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\{\varphi_i : i \in I\}$  es una base de  $V^*$ . Definimos la transformación lineal  $\varphi \in V^*$  tal que  $\varphi(v_i) = 1$  para todo  $i \in I$ . Entonces existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$ , y para cada  $i \in F$  un escalar  $\alpha_i$ , tales que

$$\varphi = \sum_{i \in F} \alpha_i \varphi_i$$

Como  $V$  tiene dimensión infinita entonces  $I$  es un conjunto infinito. Como  $F$  es finito entonces debe existir  $j \in I \setminus F$ . Evaluando en  $v_j$  y observando que  $\delta_{ij} = 0$  para todo  $i \in F$  (pues  $j \notin F$ ) obtenemos

$$1 = \varphi(v_j) = \sum_{i \in F} \alpha_i \varphi_i(v_j) = \sum_{i \in F} \alpha_i \delta_{ij} = 0$$

lo cual es imposible. ■

Para concluir con el artículo, resolveremos un último ejercicio, donde aprovecharemos la relación entre la dimensión de un subespacio con la dimensión de su anulador para calcular una dimensión específica que, de otra forma, sería muy difícil de calcular.

**Ejemplo 2.3** (De parcial) *Sea  $K$  un cuerpo y  $n \in \mathbb{N}$ . Hallar la dimensión del subespacio de  $K^{n \times n}$  generado por el conjunto  $\{AB - BA : A, B \in K^{n \times n}\}$ .*

*Solución.* Sea  $S$  el subespacio de  $K^{n \times n}$  generado por el conjunto  $\{AB - BA : A, B \in K^{n \times n}\}$ . Buscaremos el anulador de  $S$ .

Observemos que  $\varphi \in S^\circ$  si y solo si  $\varphi$  se anula en un conjunto de generadores de  $S$ . Luego, podemos concluir que  $\varphi \in S^\circ$  si y solo si  $\varphi(AB - BA) = 0$  para todo par de matrices  $A$  y  $B$  de  $K^{n \times n}$ . Esto equivale a decir que  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$  para todo par de matrices  $A$  y  $B$  de  $K^{n \times n}$ .

Sea  $\varphi \in S^\circ$ . En particular se tiene  $\varphi(E^{pi}E^{jq}) = \varphi(E^{jq}E^{pi})$  para todo arreglo de números naturales  $i, j, p, q$  entre 1 y  $n$ .

Usando la linealidad de  $\varphi$  y las identidades  $E^{pi}E^{jq} = \delta_{ij}E^{pq}$  y  $E^{jq}E^{pi} = \delta_{qp}E^{ji}$ , obtenemos  $\delta_{ij}\varphi(E^{pq}) = \delta_{qp}\varphi(E^{ji})$ . Esto lo tenemos probado para cualquier arreglo de números naturales  $i, j, p, q$  entre 1 y  $n$ .

En particular, tomando dos números naturales distintos cualesquiera  $p$  y  $q$  (siempre entre 1 y  $n$ ), y tomando  $i = j = 1$ , obtenemos  $\varphi(E^{pq}) = 0$ . Concluimos que  $\varphi$  se anula en todas las matrices canónicas  $E^{pq}$  con  $p \neq q$ .

Ahora, tomando  $p = q$  y  $i = j$  cualesquiera (números naturales entre 1 y  $n$ ), obtenemos  $\varphi(E^{pp}) = \varphi(E^{ii})$ . Concluimos que existe  $\alpha \in K$  tal que  $\varphi(E^{ii}) = \alpha$  para todo  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ .

Podemos resumir nuestros resultados diciendo que  $\varphi(E^{ij}) = \delta_{ij}\alpha$  para todo arreglo  $i, j$  de números naturales entre 1 y  $n$ .

Dada una matriz  $A = [a_{ij}] \in K^{n \times n}$  arbitraria, expresándola como combinación lineal de las matrices canónicas se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E^{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi(E^{ij}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{ij} \alpha = \sum_{i=1}^n a_{ii} \alpha = \alpha \operatorname{Tr}(A) \end{aligned}$$

Concluimos que  $\varphi = \alpha \operatorname{Tr}$ . Como  $\varphi$  era un elemento arbitrario de  $S^\circ$ , entonces  $S \subseteq \langle \operatorname{Tr} \rangle$ . La otra inclusión se sigue directamente de que  $\operatorname{Tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$  es una transformación lineal tal que  $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$  para todo par de matrices  $A$  y  $B$  de  $K^{n \times n}$ .

Luego,  $\dim(S) = \dim(K^{n \times n}) - \dim(S^\circ) = n^2 - 1$ .