Apunte sobre el cálculo de la forma de Jordan
(Versión preliminar)

Índice

Nota Preliminar: En las secciones 1.1, 1.2, 1.3 y 2.1 se desarrollan las herramientas para el cálculo de la forma de Jordan, con las notaciones y demostraciones completas incluidas. En las secciones 1.4 y 2.2 se describe sintéticamente un método efectivo para calcular la forma de Jordan siguiendo las herramientas teóricas mencionadas. Finalmente en 1.5 y en 2.3 se exhiben ejemplos concretos donde se ilustra dicho método.

1. El caso nilpotente

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un endomorfismo nilpotente[1].
Sea $k := \min \left\{ j \in \mathbb{N} / f^j = 0 \right\}$.
Para cada $v \neq 0$ notamos $< v >_f := < v, f(v), f^2(v), f^3(v), ..., f^i(v), ... >$.

Proposición 1 *Para cada* j, $1 \leq j \leq k-1$, *se tiene* $\ker\left(f^j\right) \subsetneq \ker\left(f^{j+1}\right)$.

Demostración. Si $v \in \ker(f^j)$ entonces $f^{j+1}(v) = f(f^j(v)) = f(0) = 0$, o sea, vale la inclusión. Para ver que es estricta supongamos que no, que ambos núcleos son iguales, entonces sea $v \in \ker(f^{j+2})$, luego $f(v) \in \ker(f^{j+1}) = \ker(f^j)$ y por lo tanto $f^{j+1}(v) = 0$, es decir, tenemos $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1}) = \ker(f^{j+2})$. Repitiendo el razonamiento se tendría que este núcleo coincide con $\ker(f^k) = \mathbb{K}^n$, y entonces k no sería el mínimo exponente que anula a f. ■

Para cada $j = 1, ..., k$ notamos $d_j := \dim\left(\ker\left(f^j\right)\right)$, de acuerdo a la Proposición anterior se tiene $d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = n$.

[1] Todos los argumentos se extienden trivialmente al caso de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n en lugar de $\mathbb{K}^n$.

1.1. Construcción del primer gran bloque de Jordan

Definición 2 *Dado que* $\ker\left(f^{k-1}\right) \subsetneq \ker\left(f^{k}\right) = \mathbb{K}^n$ *sean* $v_1, ..., v_{n-d_{k-1}} \in \mathbb{K}^n$ *linealmente independientes tales que* $\ker\left(f^{k-1}\right) \oplus < v_1, ..., v_{n-d_{k-1}} >= \mathbb{K}^n$.

Observemos que como $f^{k-1}v_i \neq 0$ y $f^k v_i = 0$ (pues $f^k = 0$) se tiene $\dim\left(< v_i >_f\right) = k$ y que B_i $\left\{v_i, f\left(v_i\right), f^2\left(v_i\right), ..., f^{k-1}\left(v_i\right)\right\}$ es una base de $< v_i >_f$ para todo $i = 1, ..., n - d_{k-1}$.

Lema 3 *Los subespacios* $< v_i >_f$ *están en suma directa, donde* $i = 1, ..., n - d_{k-1}$. *En otras palabras,* $S_k :=< v_1 >_f \oplus < v_2 >_f \oplus \cdots \oplus < v_{n-d_{k-1}} >_f$ *es un subespacio de* $\mathbb{K}^n$. *Más aun, como cada* $< v_i >_f$ *es estable, en particular* S_k *es también estable y de dimensión* $\left(n - d_{k-1}\right) k$.

Demostración. Basta ver que $\bigcup\limits_{i=1}^{n-d_{k-1}} B_i$ es una base de S_k, y para ello es suficiente ver que los vectores en ese conjunto son l.i.: supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1j} f^j\left(v_1\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{2j} f^j\left(v_2\right) + \cdots + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{n-d_{k-1}j} f^j\left(v_{n-d_{k-1}}\right) = 0,$$

entonces, aplicando f^{k-1} se tiene

$$\alpha_{10} f^{k-1}\left(v_1\right) + \alpha_{20} f^{k-1}\left(v_2\right) + \cdots + \alpha_{n-d_{k-1}0} f^{k-1}\left(v_{n-d_{k-1}}\right) = 0.$$

En otras palabras

$$\alpha_{10} v_1 + \alpha_{20} v_2 + \cdots + \alpha_{n-d_{k-1}0} v_{n-d_{k-1}} \in \ker\left(f^{k-1}\right),$$

lo que implica $\alpha_{i0} = 0$ para todo $i = 1, ..., n - d_{k-1}$ por la elección de los vectores v_i.
Análogamente, aplicando f^{k-2} se deduce $\alpha_{i1} = 0$ $\forall i = 1, ..., n - d_{k-1}$ y así sucesivamente se tiene lo buscado. ■

Observación 4 *Llamando* E_k *a la unión* $\bigcup\limits_{i=1}^{n-d_{k-1}} B_i$ *se tiene que* E_k *es una base de* S_k *y la matriz de* $f : S_k \to S_k$ *en esta base* E_k *tiene la forma:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

donde $J_k \in \mathbb{K}^{k \times k}$ *es una matriz bloque de Jordan nilpotente de orden* k*:*

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos vectores serán los primeros vectores de la base que realiza la forma de Jordan. De manera muy similar se construyen los siguientes, como se verá en la sección siguiente.

1.2. Construcción de los siguientes bloques de Jordan

De acuerdo a la Definición 2 y al Lema 3 se deduce que los vectores $f(v_1), ..., f(v_{n-d_{k-1}})$ son linealmente independientes y que $\left\langle f(v_1), ..., f(v_{n-d_{k-1}})\right\rangle \cap \ker(f^{k-2}) = \{0\}$. Por lo tanto tiene sentido la definición siguiente:

Definición 5 *Sean $v_1, ..., v_{n-d_{k-1}} \in \mathbb{K}^n$ los vectores introducidos en Definición 2, sea entonces $w_1, ..., w_t$ una base del complemento de $\ker(f^{k-2}) \oplus \left\langle f(v_1), ..., f(v_{n-d_{k-1}})\right\rangle$ dentro de $\ker(f^{k-1})$. En otras palabras se tiene*

$$\ker(f^{k-2}) \oplus \left\langle f(v_1), ..., f(v_{n-d_{k-1}})\right\rangle \oplus \langle w_1, ..., w_t\rangle = \ker(f^{k-1})$$

y en particular $t = d_{k-1} - d_{k-2} - (n - d_{k-1}) = 2d_{k-1} - d_{k-2} - n$ (observemos que este cantidad es siempre ≥ 0 pero que eventualmente puede ser 0, en cuyo caso no existirán los vectores w_i).

Por la construcción, de existir los vectores w_i, cada subespacio $\langle w_i\rangle_f$ tiene dimensión $k-1$ y $B_i' := \left\{w_i, f(w_i), ..., f^{k-2}(w_i)\right\}$ es una base para $\langle w_i\rangle_f$.

Se tiene entonces:

Lema 6 *Los subespacios $< w_i >_f$ para $i = 1, .., t$ están en suma directa, es decir $S_{k-1} =< w_1 >_f \oplus < w_2 >_f \oplus \cdots \oplus < w_t >_f$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$. Como cada $< w_i >_f$ es estable, en particular S_{k-1} es también estable, de dimensión $(2d_{k-1} - d_{k-2} - n)(k-1)$ y con base $E_{k-1} = \bigcup_{i=1}^{t} B_i'$.*
Más aun, si S_k denota el subespacio construido en el Lema 3, se tiene $S_k \cap S_{k-1} = \{0\}$ y por lo tanto $S_k \oplus S_{k-1}$ es un subespacio estable de $\mathbb{K}^n$ cuya base esta formada por $E_k \cup E_{k-1}$.

Demostración. La primera afirmación se demuestra análogamente como en la prueba del Lema 3. Veamos entonces solo la segunda.
Supongamos que se tiene un elemento en $S_k \cap S_{k-1}$, eso quiere decir que vale una relación del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n-d_{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} f^j(v_i) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{k-2} \beta_{ij} f^j(w_i). \tag{1}$$

Aplicando f^{k-1}, dado que todos los $w_i \in \ker(f^{k-1})$, se tiene $\sum_{i=1}^{n-d_{k-1}} \alpha_{i0} f^{k-1}(v_i) = 0$, lo que implica $\alpha_{i0} = 0, \forall i = 1, ..., n - d_{k-1}$ por la Definición 2.
Ahora, aplicando f^{k-2} se tiene $\sum_{i=1}^{n-d_{k-1}} \alpha_{i1} f^{k-1}(v_i) = \sum_{i=1}^{t} \beta_{i0} f^{k-2}(w_i)$, pero entonces $\sum_{i=1}^{n-d_{k-1}} \alpha_{i1} f(v_i) - \sum_{i=1}^{t} \beta_{i0} w_i \in \ker(f^{k-2})$ y por Definición 5 debe ocurrir que $\alpha_{i1} = 0, \forall i = 1, ..., n - d_{k-1}$ y $\beta_{i0} = 0, \forall i = 1, ..., t$.
Se sigue aplicando a la igualdad (1) la aplicación f^{k-3} y así sucesivamente. ■

Observación 7 *Dado que los subespacios S_k y S_{k-1} son estables, $S_k \oplus S_{k-1}$ también lo es y la matriz de $f : S_k \oplus S_{k-1} \to S_k \oplus S_{k-1}$ en la base $E_k \cup E_{k-1}$ tiene la forma:*

$$\begin{pmatrix}
\boxed{J_k} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \boxed{J_k} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \boxed{J_{k-1}} & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{J_{k-1}}
\end{pmatrix}$$

donde J_k y J_{k-1} son matrices bloques de Jordan de orden k y $k-1$ respectivamente. Además hay $n - d_{k-1}$ bloques de orden k y $2d_{k-1} - d_{k-2} - n$ bloques de orden $k-1$ (eventualmente ninguno si $2d_{k-1} - d_{k-2} - n = 0$).

Ahora se continua de la misma manera: se considera el subespacio $\ker(f^{k-3}) \subsetneq \ker(f^{k-2})$ y se hace la descomposición:

$$\ker(f^{k-2}) = \ker(f^{k-3}) \oplus \left\langle f^2(v_1), ..., f^2(v_{n-d_{k-1}})\right\rangle \oplus \langle f(w_1), ..., f(w_t)\rangle \oplus \langle z_1, ..., z_s\rangle$$

donde $z_1, ..., z_s$ son linealmente independientes y tales que $\langle z_i\rangle_f$ tiene dimensión $k-2$ para cada $i = 1, ..., s$. Observamos también que

$$s = d_{k-2} - d_{k-3} - (n - d_{k-1}) - (2d_{k-1} - d_{k-2} - n) = 2d_{k-2} - d_{k-3} - d_{k-1}$$

y que eventualmente es 0.
Se construye entonces $S_{k-2} = \langle z_1\rangle_f \oplus \cdots \oplus \langle z_s\rangle_f$ con una base E_{k-2} (unión de las bases naturales de los $\langle z_i\rangle_f$) y se demuestra como antes que se tiene $S_k \oplus S_{k-1} \oplus S_{k-2} \subset \mathbb{K}^n$ que es un subespacio estable y que la matriz de f en la base $E_k \cup E_{k-1} \cup E_{k-2}$ se descompone con bloques de Jordan de tamaños k, $k-1$ y $k-2$ (aunque de estos dos últimos tipos podrían no aparecer eventualmente).
Y así se sigue...

1.3. Teorema de descomposición de Jordan para matrices nilpotentes

Repitiendo los argumentos recursivamente se demuestra entonces el Teorema:

Teorema 8 *Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una transformación lineal nilpotente. Entonces existe una base B y una sucesión decreciente de números naturales $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r$ tales que $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ y*

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{k_2}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{J_{k_{r-1}}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{J_{k_r}} \end{pmatrix}$$

donde cada matriz J_{k_i} es una matriz de bloques Jordan de tamaño $k_i \times k_i$. Además $k_1 = \min\left\{j \in \mathbb{N} \ / \ f^j = 0\right\}$. Si para cada $j = 1, ..., k_1$ llamamos $d_j = \dim\left(\ker\left(f^j\right)\right)$ se tiene que el número de bloques de Jordan de tamaño $j \times j$ es igual a :

$$\begin{cases} n - d_{k_1-1} & si \quad j = k_1 \\ 2d_{k_1-1} - d_{k_1-2} - n & si \quad j = k_1 - 1 \\ 2d_j - d_{j-1} - d_{j+1} & si \quad 2 \leq j \leq k_1 - 2 \\ 2d_1 - d_2 & si \quad j = 1 \end{cases}.$$

1.4. Un método para encontrar la forma de Jordan y los cambios de base (caso nilpotente)

Entrada: una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotente.
Salida: una matriz inversible $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $C^{-1}AC$ tiene la forma de la matriz del Teorema 8 (es decir la forma de Jordan de A).

Para obtener la Salida a partir de la Entrada se siguen los pasos siguientes:

1. Calcular todas las potencias de la matriz A hasta que se obtiene la matriz nula. En particular se obtiene el valor de $k := \text{mín}\left\{j \in \mathbb{N},\ A^j = 0\right\}$.

2. Para cada valor de j con $j = 1, ..., k$ hallar una base de $\ker(A^j)$; en particular se calculan los valores de $d_j = \dim\left(\ker\left(A^j\right)\right)$.

3. Tomar una base de $\ker\left(A^{k-1}\right)$ y completarla a una base de $\mathbb{K}^n$. Este proceso construye los vectores $v_1, ..., v_{n-d_{k-1}}$ definidos en la Definición 2

4. A partir de los vectores construidos en la etapa 3 se obtiene el conjunto l.i. E_k introducido en la Observación 4 calculando para cada vector v_i los vectores $A^0 v_i, Av_i, ..., A^{k-1} v_i$.

5. Se completa la base de $\ker\left(A^{k-2}\right)$ calculada en la etapa 2 y la familia de vectores $Av_1, ..., Av_{n-d_{k-1}}$ a una base de $\ker\left(A^{k-1}\right)$ como en Definición 5. Si no hay nada que completar porque con esos vectores ya se obtiene $\ker\left(A^{k-1}\right)$ se pasa a la etapa 7, si no se construyen vectores $w_1, ..., w_t$.

6. Como en el enunciado del Lema 6 se calcula el conjunto l.i. E_{k-1} uniendo los conjuntos $\left\{A^0 w_i, Aw_i, ..., A^{k-2} w_i\right\}$, para $i = 1, ..., t$.

7. Se repite la etapa 5 pero para $\ker\left(A^{k-2}\right)$: se completa el conjunto formado por la base de $\ker\left(A^{k-3}\right)$ (calculada en la etapa 2), los vectores $A^2 v_1, ..., A^2 v_{n-d_{k-1}}$ (hallados en la etapa 4) y los vectores $Aw_1, ..., Aw_t$ (si los hay, hallados en la etapa 5) a una base de $\ker\left(A^{k-2}\right)$ hallando vectores $z_1, ..., z_s$ y se construye el conjunto l.i. E_{k-2} uniendo los conjuntos $\left\{A^0 z_i, Az_i, ..., A^{k-3} z_i\right\}$ para $i = 1, ..., s$ tal como se esbozó en lo que sigue a la Observación 7.

8. Se repite el procedimiento descrito en las etapas 3 a 7 y se construyen recursivamente flias l.i. $E_{k-3}, ..., E_1$.

9. La base "de Jordan" será la base $B = E_k \cup ... \cup E_1$ donde es posible que algunos de los conjuntos E_i sea vacío (solo se puede asegurar a priori que $E_k \neq \emptyset$).

10. La matriz inversible $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se obtiene simplemente poniendo los vectores de B como columnas (respetando el orden).

1.5. Un ejemplo del método para nilpotentes

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Etapa 1

- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto el valor de k es igual a 3.

Etapa 2

- Base de $\ker(A) = \{(1,0,1,0,0),(0,-3,-2,0,1),(0,2,0,1,0)\}$
- Base de $\ker\left(A^2\right) = \{(1,0,1,0,0),(-1,1,0,0,0),(2,0,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\}$
- $\ker\left(A^3\right) = \mathbb{K}^5$.

Etapa 3

- Completar la base de $\ker(A^2)$ a una base de $\mathbb{K}^5$ agregando el $v_1 = (1,0,0,0,0)$

Etapa 4

- $E_3 = \left\{v_1, Av_1, A^2v_1\right\} = \{(1,0,0,0,0),(-1,1,0,0,0),(1,0,1,0,0)\}$

Etapa 5

- Completar el conjunto l.i. $\{\text{Base de} \ker(A)\} \cup \{Av_1\} =$
  $\{(1,0,1,0,0),(0,-3,-2,0,1),(0,2,0,1,0)\} \cup \{(-1,1,0,0,0)\}$ a una base de $\ker(A^2)$.
  En este paso no se agrega nada pues $\dim\left(\ker\left(A^2\right)\right) = 4$

Etapa 6

- No se hace nada en este caso.

Etapas 7 y 8

- Se completa a una base de $\ker(A^{k-2}) = \ker(A)$ la familia $\left\{A^2v_1\right\} \cup \left\{\text{Base de } \ker\left(A^{k-3}\right)\right\} = \{(1,0,1,0,0)\}$.
  Para ello se agregan los vectores $(0,-3,-2,0,1)$ y $(0,2,0,1,0)$.

Etapa 9

- La base B será: $\{(1,0,0,0,0),(-1,1,0,0,0),(1,0,1,0,0),(0,-3,-2,0,1),(0,2,0,1,0)\}$

Etapa 10

- La matrices C y C^{-1} son respectivamente las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{ Forma de Jordan de } A.$$

2. Forma de Jordan: el caso general

Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una transformación lineal tal que todas las raíces del polinomio caracteristíco χ pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ (este es siempre el caso si el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$). Supongamos entonces que el polinomio característico χ se factoriza en $\mathbb{K}$ de la forma:

$$\chi = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{e_i}.$$

2.1. Reducción al caso nilpotente

Definición 9 *Para cada autovalor λ_i de f sea $V_{\lambda_i} := \ker((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i})$.*

Observar que el autoespacio $S_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ es un subespacio de V_{λ_i} y por lo tanto $\dim V_{\lambda_i} \geq 1$.

Lema 10 *(Descomposición primaria) Cada subespacio V_{λ_i} es invariante por f y además se tiene la descomposición $\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$.*

Demostración. Si $v \in V_{\lambda_i}$, basta ver que $f(v) \in \ker((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i})$. Dado que f y $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i}$ son polinomios evaluados en f se tiene que $f \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} = (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ f$ (en otras palabras, ambas transformaciones lineales conmutan) y por lo tanto $((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ f)(v) = (f \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i})(v) = 0$.
Para ver la descomposición consideremos para cada $i = 1, ..., m$ el polinomio $P_i = \dfrac{\chi}{(x - \lambda_i)^{e_i}} \in \mathbb{K}[x]$. Entonces los polinios $P_1, ..., P_m$ no tienen ningún factor común y así existen polinomios $Q_1, ..., Q_m \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$1 = Q_1 P_1 + \cdots + Q_m P_m.$$

Especializando esta identidad polinomial en f queda:

$$\mathrm{Id} = Q_1(f) \circ P_1(f) + \cdots + Q_m(f) \circ P_m(f)$$

y por lo tanto, para cualquier $v \in \mathbb{K}^n$ se tiene:

$$v = Q_1(f)(P_1(f)(v)) + \cdots + Q_m(f)(P_m(f)(v)).$$

Afirmamos que para cualquier $v \in \mathbb{K}^n$ se tiene que $Q_i(f)(P_i(f)(v)) \in V_{\lambda_i}$: en efecto, tenemos las igualdades:

$$(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i}(Q_i(f)(P_i(f)(v))) = ((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ Q_i(f) \circ P_i(f))(v) = ((f - \lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ P_i(f) \circ Q_i(f))(v).$$

Por la construcción de P_i tenemos que $(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ P_i(f) = \chi(f)$ pues $\chi = (x-\lambda_i)^{e_i} P_i$ de donde, por Hamilton-Cayley, $(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} \circ P_i(f)$ es el endomorfismo nulo y así $(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{e_i} (Q_i(f)(P_i(f)(v))) = 0$ para cualquier $v \in \mathbb{K}^n$. Con esto se demostró que $\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_m}$.
Para ver que la suma es directa supongamos que se tiene

$$0 = v_1 + \cdots + v_m \tag{2}$$

con $v_i \in V_{\lambda_i}$ para $i = 1, ..., m$ y veamos que todos los v_i son 0.
Apliquemos a la identidad (2) la aplicación $P_i(f)$. Entonces queda:

$$0 = P_i(f)(v_i) \tag{3}$$

pues $P_i(f)(v_j) = 0$ para todo $j \neq i$ ya que $(x-\lambda_j)^{e_j}$ es un factor de P_i.
Por otro lado como $v_i \in V_{\lambda_i}$ se tiene

$$(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{e_i}(v_i) = 0. \tag{4}$$

Siendo los polinomios P_i y $(x-\lambda_i)^{e_i}$ sin factores comunes, existen polinomios H, G tales que $1 = HP_i + G(x-\lambda_i)^{e_i}$. Especializando esta identidad polinomial en f y luego en v_i y usando (3) y (4) se deduce $v_i = 0$ y por lo tanto la descomposición en suma directa. ■

Tenemos entonces el corolario:

Corolario 11 *Con las notaciones anteriores se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $i = 1, ..., m$, si B_i denota una base del subespacio V_{λ_i} (ver Definición 9), entonces $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ es una base de $\mathbb{K}^n$.*

2. *Para cada $i = 1, ..., m$, la transformación lineal $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ aplica V_{λ_i} en V_{λ_i} y es nilpotente sobre este espacio vectorial.*

3. *La matriz de f en la base B como en el item 1 es una matriz en bloques, con m-bloques y cada uno de tamaño $e_i \times e_i$. En otras palabras la matriz de f en la base B tiene la forma:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

donde la matriz A_i pertenece a $\mathbb{K}^{e_i \times e_i}$ para $i = 1, ..., m$

Demostración. La afirmación 1 es consecuencia inmediata de la descomposición en suma directa del Lema anterior.
La afirmación 2 es consecuencia de que V_{λ_i} es invariante para f (por el Lema) y para $\lambda_i \mathrm{Id}$ (siempre) y como $V_{\lambda_i} = \ker(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{e_i}$ claramente $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ es nilpotente sobre V_{λ_i}.
Para terminar veamos la afirmación 3: de acuerdo a la descomposición del Lema (con subespacios estables) la matriz de f en la base B se descompondrá en m-bloques donde cada bloque A_i será la matriz de $f : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ en la base B_i. Falta solo ver entonces que $\dim(V_{\lambda_i}) = e_i$ para todo i. Como $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ es nilpotente sobre V_{λ_i}(afirmación 2), f no puede tener ningún otro autovalor sobre V_{λ_i} que no sea λ_i y así el polinomio caraterístico de A_i será $(x-\lambda_i)^{\dim(V_{\lambda_i})}$. Como la matriz de f en la base B es en bloques, el polinomio característico χ es el producto de los característicos de cada bloque y así:

$$\chi = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{\dim\left(V_{\lambda_i}\right)}$$

y por unicidad de la factorización de polinomios debe ocurrir que $\dim\left(V_{\lambda_i}\right) = e_i$ para todo índice i. ■

La idea entonces es simple: trabajar por separado con cada submatriz A_i o lo que es lo mismo con cada transformación lineal $f : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ sabiendo que $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ es nilpotente.
Usando el Teorema de Jordan para matrices nilpotentes se tiene:

Proposición 12 *Existe una base E_i de V_{λ_i} tal que la matriz de $f - \lambda_i \mathrm{Id} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

donde cada J_k es un bloque de Jordan nilpotente como en el Teorema 8. ■

De esta Proposición se deduce inmediatamente el resultado para $f : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$:

Proposición 13 *Existe una base E_i de V_{λ_i} tal que la matriz de $f : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{1,\lambda}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{2,\lambda}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_{t,\lambda}} \end{pmatrix}$$

donde cada $J_{k,\lambda}$ es un bloque de Jordan del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

y los tamaños de las matrices $J_{k,\lambda}$ son no crecientes a medida que aumenta k. ■

Resumiendo estos resultados se tiene:

Teorema 14 *(Forma de Jordan para matrices cualesquiera) Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una transformación lineal tal que todas las raíces $\lambda_1, ..., \lambda_m$ del polinomio característico de f están en $\mathbb{K}$. Entonces existe una base E de $\mathbb{K}^n$ tal que la matriz de f en esta base se escribe:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

siendo $\chi_{A_i} = (x - \lambda_i)^{e_i}$.
Más aun, cada matriz A_i *es también una matriz en bloques de la forma:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_t} \end{pmatrix}$$

y cada bloque es del tipo:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}. \blacksquare$$

2.2. Un método para hallar la forma de Jordan y los cambios de base (caso general)

Entrada: una matriz $F \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con todos los autovalores en $\mathbb{K}$.
Salida: una matriz inversible $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $C^{-1}FC$ tiene la forma de la matriz del Teorema 14 (es decir la forma de Jordan de F).

Para obtener la Salida a partir de la Entrada se siguen los pasos siguientes:

1. Hallar el polinomio característico de F y factorizarlo linealmente como $\prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{e_i}$.

2. Para cada autovalor λ_i hallar una base de $\ker (F - \lambda_i)^{e_i}$ donde e_i es la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico. Sea $B_i = \{v_1, ..., v_{e_i}\}$ la base hallada y sea $B = \cup_i B_i$. Sea D la matriz cambio de base de la base B a la canónica. Entonces $D^{-1}FD$ es una matriz en bloques del tipo
$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_m} \end{pmatrix}.$$

3. Para cada matriz $A_i \in \mathbb{K}^{e_i \times e_i}$ por el Corolario 11 se sabe que $A_i - \lambda_i \mathrm{Id}$ es una matriz nilpotente y se aplica la construcción para la forma de Jordan de matrices nilpotentes para la matriz $A_i - \lambda_i \mathrm{Id}$ y se obtiene una matriz inversible $C_i \in \mathbb{K}^{e_i \times e_i}$ tal que $C_i^{-1} (A_i - \lambda_i \mathrm{Id}) C_i$ está en forma de Jordan.

4. Se hacen los pasos 2 a 4 para cada autovalor λ_i y se toma C la matriz inversible:

$$D \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{C_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{C_m} \end{pmatrix}.$$

2.3. Un ejemplo

Hallar la forma de Jordan y las matrices cambio de base de $F = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Etapa 1}}$

- El polinomio característico de F es $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$ y al saber que 1 y -1 son raíces (por la forma de la matriz) se deduce fácilmente que $\chi = (X-2)^2 (X-1)(X+1)$

$\boxed{\textbf{Etapa 2}}$

- Base de $\ker (F - 2\mathrm{Id})^2$:

$$(F-2\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 2 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -54 & -193 \\ 0 & 0 & -27 & -96 \\ 0 & 0 & 9 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  de donde $\ker (F-2\mathrm{Id})^2 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

- Base de $\ker (F - \mathrm{Id})$:

$$F - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 3 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  de donde $\ker (F - \mathrm{Id}) = \langle (23, 12, -4, 1) \rangle$

- Base de $\ker (F + \mathrm{Id})$:

$$F + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 5 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  de donde $\ker (F + \mathrm{Id}) = \langle (-6, -3, 1, 0) \rangle$

- La base B es entonces $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (23,12,-4,1), (6,-3,1,0)\}$ y sea D la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & -6 \\ 0 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

  Entonces se tiene que $D^{-1}FD$ es la matriz en bloques:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & -6 \\ 0 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Etapa 3

- La matriz A_1 es $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A_1 - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es nilpotente. Se aplican los argumentos para hallar la forma de Jordan de matrices nilpotentes: como $(A_1 - 2\mathrm{Id})^2 = 0$, se halla $\ker(A_1 - 2\mathrm{Id})$ y se lo completa a una base de $\mathbb{K}^2$: $\ker(A_1 - 2\mathrm{Id}) = \langle (1,-2) \rangle$ y por lo tanto $\{v, (A_1 - 2\mathrm{Id})\, v\}$ es una base adecuada si v es l.i. con $(1,-2)$. Tomamos por ejemplo $(1,0)$ entonces la base es $\{(1,0),(-2,-1)\}$ y la matriz $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Como las matrices A_2 y A_3 son de 1×1 no se hace nada siendo $C_2 = (1)$ y $C_3 = (1)$

Etapa 4

- La matriz C será:

$$D \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & -6 \\ 0 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 23 & -6 \\ 0 & -1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matriz C^{-1} es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 18 & 47 \\ -1 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 23 & -6 \\ 0 & -1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Forma de Jordan de } F.$$