1	2	3	4
B	B	B	B

Calif.
A

Apellido y Nombre: Homero Simpson
Libreta: 123/17

Gabriel Palau

Álgebra Lineal - 1° Cuatrimestre 2018
2º Parcial Resuelto (10/07/2018)

1. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar la forma y una base de Jordan de A.

   Solución: Un breve cálculo (que no voy a hacer pero ustedes deberían) nos dice que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = (x+1)^4(x-2)^2$, esto nos asegura que -1 y 2 son los autovalores de A. De modo que de cara a calcular la forma de Jordan de A, nos disponemos a estudiar los sucesivos núcleos, de las potencias de $A - \lambda I$ para nuestros dos λ's que son el -1 y 2.

   Caso $\lambda = 2$:
   $$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Haciendo las cuentas se encuentra que $Nu(A-2I) = gen\{2e_1+9e_4+3e_5-9e_6; 2e_1+3e_2+9e_3+27e_6\}$, de modo que $dim(Nu(A-2I)) = 2$ lo que indica que hay dos sub-bloques asociados al autovalor 2.

   Caso $\lambda = -1$:
   $$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$. En este caso $Nu(A+I) = gen\{e_1; 2e_2+e_5\}$. Una vez más $dim(Nu(A+I)) = 2$, indicando que J_A posee dos sub-bloques asociados al autovalor -1. Estudio la potencia siguiente,

$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, a ojo puede verse (mirando las columnas nulas y notando que las no nulas son linealmente independientes) que $Nu((A+I)^2) = gen\{e_1; 2e_2+e_5; e_2\}$. Con la finalidad de establecer el tamaño del sub-bloque más grande asociado a este autovalor, estudio los demás núcleos, pues dicho tamaño viene dado por aquél exponente en el cual las inclusiones de los núcleos dejan de ser estrictas.

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

Como las dimensiones de los núcleos de las dos matrices de arriba son 4, quiere decir que los núcleos son iguales (porque además hay contención). De modo que $m_A(x) = (x+1)^3(x-2)$ y la forma de Jordan será:

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a la base de Jordan, el primer vector $\vec{v}$ debe satisfacer $\vec{v} \in Nu(A+I)^3 \setminus Nu(A+I)^2$, el más fácil de ubicar cumpliendo esto es e_3, el segundo será $(A+I)e_3 = e_1 + e_2$ y el tercero $(A+I)^2(e_3) = -e_1$. En cuanto al cuarto vector de la base, si miramos J_A, se ve que debe ser un autovector asociado al -1, pero hay que tomarlo linealmente independiente con $-e_1$, por ejemplo $2e_1 + e_5$ (más arriba están los núcleos). Los últimos dos vectores de la base son simplemente dos autovectores linealmente independientes entre si asociados al autovalor 2 (ya los habíamos calculado arriba). Entonces la base de Jordan queda:

$B = \{e_3; e_1+e_2; -e_1; 2e_1+e_5; 2e_1+9e_4+3e_5-9e_6; 2e_1+3e_2+9e_3+27e_6\}$.

b) Sea $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que $m_B = m_A$, ¿Son A y B semejantes?

Solución: Una matriz B es semejante a A solo si ambas tienen la misma forma de Jordan. Inspirado en el echo de que los exponentes del minimal dan los tamaños de los sub-bloques más grandes de cada autovalor, escribo la siguiente matriz,

$$B = J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo minimal es igual que el de A. No obstante sus formas de Jordan difieren, por tanto no son semejantes. Otra opción era exhibir la matriz :

$$B = J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

¡ piensen si hay otra !

2. Definimos en $\mathbb{R}[X]$ $(p,q) := \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(1)q^{(k)}(1)$ (con $p^{(k)}$ notamos la k-ésima derivada de p) y sea $S = \langle 1, X, X^2 \rangle$.

   a) Probar que $(,)$ es un producto interno en $\mathbb{R}[X]$.

   Solución: Un producto interno es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial, como es nuestro caso, es una función con imagen en los reales. Comencemos por ver que esto se satisface.

   Claramente $(0;0) = 0 \in \mathbb{R}$. Si quiero hacer el producto entre p y q, con alguno de ellos no nulo (sin perder generalidad, digamos p para fijar ideas), entonces si derivamos p más allá de su grado (que es un número natural) será el polinomio nulo (siempre) y por lo tanto todas las derivadas de p evaluadas en 1, serán 0 a partir de cierto punto. Luego la sumatoria que define el producto interno que en principio tiene infinitos sumandos, se torna finita ya que solo hay que sumar hasta $k = deg(p)$ y listo el resultado es un número real por ser suma de finitos números reales.

   La linelidad en la primer coordenada y la simetría no las voy a escribir, son muy fáciles y se deducen de linelidad de evaluar funciones en un determinado valor y la propiedad distributiva y de la conmutatividad del producto de números reales.

   Suponiendo que esto este echo, la linealidad en la segunda coordenada es corolario de la linelidad en la primera más la simetría.

   Veamos que $(;)$ es definido positivo, sea $p \in \mathbb{R}[X]$ no nulo (ya se que si es nulo da cero), $(p;p) = \sum_{k=1}^{deg(p)} (p^{(k)}(1))^2 \geqslant 0$. Resta ver que $(p;p) = 0$ solo en el caso en que $p = 0 \in \mathbb{R}[X]$. Supongamos que $p \neq 0$, entonces el grado de p es un número natural N, o sea $p = a_N x^N +$ potencias menores, con $a_N \neq 0$, por lo tanto $P^{(N)}(x) = N!a_N \neq 0$ y evaluando en $x = 1$ queda igual, con lo cual $(p;p) = (N!a_N)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (p^{(k)}(1))^2 > 0$.

   b) Hallar el polinomio $p \in S$ mas cercano a $X^5 + 1$.

   Solución: $S = gen\{1; x; x^2\}$ más aún $B = \{1; x; x^2\}$ es base de S. Para hacer la proyección (como lo vimos en clase) debemos valernos de una base ortogonal de vectores de S, de modo que a nuestra base B, le vamos a aplicar el proceso de Gramm-Schmidt para obtener otra base $\tilde{B} = \{u_1; u_2; u_3\}$ con polinomios ortonormales entre si (ya sabemos una formula para proyectar con ortogonales, pero con ortonormales la formula queda sin denominadores; a la larga es la misma cantidad de cuentas). El primer polinomio es igual $u_1(x) = \frac{1}{||1||}$

$$||1||^2 = 1^2 + 0 + 0 + \cdots,$$

con lo cual $u_1(x) = 1$.

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{x-(x;1)1}{||x-(x;1)1||} = \frac{x-[1\cdot 1+1\cdot 0+0+0\cdots]1}{||x-(x;1)1||} \\ &= \frac{x-1}{||x-1||} = \frac{x-1}{\sqrt{0+1+0+\cdots}} = x-1, \end{aligned}$$

ojo la norma en el denominador fue calculada como $\sqrt{(x-1;x-1)}$ **con el producto interno del enunciado**.

$$\begin{aligned} u_3(x) &= \frac{x^2-(x^2;x-1)(x-1)-(x^2;1)1}{||x^2-(x^2;x-1)(x-1)-(x^2;1)1||} \\ &= \frac{x^2-(1\cdot 0+2\cdot 1+0+\cdots)(x-1)-(1\cdot 1+0+\cdots)1}{||x^2-(x^2;x-1)(x-1)-(x^2;1)1||} \\ &= \frac{x^2-2(x-1)-1}{||x^2-2(x-1)-1||} = \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{0^2+0^2+2^2+\cdots}} = \frac{x^2-2x+1}{2}, \end{aligned}$$

misma observación que antes sobre el denominador (notar que el polinomio y su derivada se anulan al evaluarse en 1, mientras que la derivada segunda vale 2).
Hecho esto, el polinomio en S más cercano a x^5+1 es su proyección.

$$\begin{aligned} P_S(x^5+1) &= (x^5+1;1)1 + (x^5+1;x-1)(x-1) + (x^5+1;\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}) \\ &= (2\cdot 1)1 + (2\cdot 0+5\cdot 1)(x-1) + (2\cdot 0+5\cdot 0+20\cdot 1)(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}) \\ &= 2+5x-5+10x^2-20x+10 = 10x^2-15x+7. \end{aligned}$$

c) Calcular la distancia de X^5+1 a $S^\perp$.
Solución: En general para cualquier vector $\vec{v}$ y subespacio T $d(\vec{v};T) = ||P_{T^\perp}(\vec{v})||$, de modo que

$$\begin{aligned} d(x^5+1;S^\perp) &= ||P_{(S^\perp)^\perp}(x^5+1)|| = ||P_S(x^5+1)|| = \sqrt{(x^5+1;x^5+1)} \\ &= \sqrt{2^2+5^2+20^2} = \sqrt{429}. \end{aligned}$$

3. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1-x_2 = x_2-x_3 = 0\}$.

a) Hallar todas las transformaciones ortogonales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumplen que $f(S) = S$ y $f(1,1,0) = (0,1,1)$.
Solución: Como f es ortogonal $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, en particular para el $(1,1,1)$. Además para el $(1,1,1)$, por ser el único generador de S (¡fíjense!) f debe asignarle un múltiplo no nulo de si mismo (otro generador de S) ya que $f(S) = S$ según el enunciado. Entonces reemplazando arriba $\vec{v} = (1,1,1)$, queda:

$$||k(1,1,1)|| = ||(1,1,1)||,$$

lo cual implica que $|k| = 1$. Analicemos por casos.

Caso k=-1: Recordemos que $f(1,1,1) = k(1,1,1) = (-1,-1,-1)$ en este caso. Además $f(1,1,0) = (0,1,1)$. Si existe una f ortogonal en estas condiciones debe cumplir que:

$$\langle (1,1,0);(1,1,1)\rangle = \langle f(1,1,0); f(1,1,1)\rangle,$$

pues las transformaciones ortogonales preservan el valor del producto interno entre dos vectores. Pero es este caso el miembro izquierdo da 2 mientras que el derecho da -2.

Caso k=1: Antes que nada, notemos que si planteamos la misma igualdad que en el caso $k=-1$, esta vez si se cumple, dando 2 a ambos lados de la igualdad (porque esta vez $k(1,1,1) = (1,1,1)$). Luego hay posibilidad de encontrar alguna f. Nuestra intención será definir f en una base y como es sabido que las transformaciones ortogonales mandan bases ortonormales en bases ortonormales lo más útil sería buscar una base ortonormal en la cual intentar definir nuestra (o nuestras) f.

Nuestra base tendrá la forma $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0); (0,0,1); \vec{v}_3\}$, pues los primeros dos vectores ortonormales que se me ocurrieron que sean combinación lineal del $(1,1,1)$ y el $(1,1,0)$ son esos dos, y por lo tanto sabré el valor que tiene f sobre ellos (si no se me ocurre ninguno, no pasa nada, tomo los dos vectores y les aplico Gram-Schmidt). El tercero de la base debe ser uno ortonormal a los dos que lo preceden, por ejemplo su producto vectorial (ya que estamos en $\mathbb{R}^3$ aprovechemos, además va a tener norma 1 si recordamos que la norma del producto vectorial es el producto de las normas de los vectores que multiplicamos por el seno del angulo entre ellos).

Así, $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Luego las f posibles son:

$$\begin{aligned}
f_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) &= (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & f_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) &= (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
f_1(0,0,1) &= (1,0,0) & f_2(0,0,1) &= (1,0,0) \\
f_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) &= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & f_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) &= (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

El primer renglón de las definiciones se deduce de que $f(1,1,0) = (0,1,1)$, en cuanto al segundo renglón, se que $f(0,0,1) = f((1,1,1)-(1,1,0)) = (1,1,1)-(0,1,1) = (1,0,0)$, ese es el modo de deducir el primer y segundo renglón de arriba, en cuanto al tercer renglón uso el echo de que f manda BON a BON como había mencionado. de modo que la asignación para tiene que ser un vector que complete a BON con las asignaciones previas, y no puede ser otro que más o menos el producto vectorial de las imágenes.

b) Decidir cuáles de las transformaciones halladas en el ítem anterior son simetrías, cuáles rotaciones y cuáles simetrías compuestas con rotaciones. ¿Es alguna autoadjunta para el producto interno usual?

Solución: Si calculamos la matriz de f_1 en base canónica vamos a poder determinar a simple vista si se trata o no de una transformación autoadjunta, en base a si la matriz es o no simétrica, ya que la base canónica es una base ortonormal (el argumento de mirar la matriz en una determinada base no es valido si tal base no es BON).

En la primer columna de $|f_1|_E$ va $f_1(e_1)$ que lo puedo determinar combinando linealmente el primer y tercer renglón de la definición del ítem previo:

$$f_1(1,0,0) = f_1\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\big)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (0,0,1),$$

Haciendo así con los restantes dos vectores de la base y después con f_2, obtenemos:

$$|f_1|_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |f_2|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos el característico de f_1 con la matriz de arriba queda, $\chi_{f_1}(x) = (x-1)(x^2-1)$ vemos que es una simetría pues sus autovalores son 1 y -1. Además también se ve que es autoadjunta por ser su matriz en base E simétrica.

En cuanto a f_2, procediendo de la misma manera podemos ver que tiene dos autovalores complejos y el otro es 1 con lo cual es una rotación y no es autoadjunta ya que su matriz en base E no es simétrica.

4. Sean $L_1 = \langle(1,0,1,0)\rangle + (2,1,0,0)$ y $L_2 = \langle(1,1,1,-1)\rangle + (0,0,1,0)$. Hallar dos variedades lineales $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^4$ que cumplan simultáneamente:

   - $\dim(M_1) = \dim(M_2) = 2$;
   - $\dim(M_1 \cap M_2) = 1$;
   - $d(M_1, L_1 \vee L_2) = d(M_2, L_1 \vee L_2) = 1$.

   Solución: Antes que nada calculemos

   $$L_1 \vee L_2 = gen\{(1,0,1,0); (1,1,1,-1); (2,1,-1,0)\} + (0,0,1,0),$$

   el tercer generador proviene de la resta de los puntos de paso.

   Como M_1 y M_2 están a distancia 1 de $L_1 \vee L_2$, esto significa que ambas han de ser paralelas a $L_1 \vee L_2$, de modo que lo más fácil es tomar como vectores directores tanto de M_1 como de M_2 como algunos de los vectores directores de $L_1 \vee L_2$. Como el enunciado pide que $\dim(M_1 \cap M_2) = 1$, vamos a asegurar esto por medio de una elección apropiada de vectores directores y puntos de paso, tomaremos un punto da paso común a ambas, esto asegura intersección no vacía. Es decir:

   $$M_1 = gen\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} + \vec{p} \qquad M_2 = gen\{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} + \vec{p},$$

   Para que la dimensión de la intersección sea 1, tomare $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$, y los otros generadores de manera que sean paralelos a $L_1 \vee L_2$ y además linealmente independientes tanto con v_1 como entre si, para asegurar que $dim(M_1) = dim(M_2) = 2$ y $\dim(M_1 \cap M_2) = 1$.

   En fin, tomaremos $\vec{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,-1)$ y $\vec{u}_2 = (2,1,-1,0)$, obteniendo:

$$M_1 = gen\{(1,0,1,0);(1,1,1,-1)\} + \vec{p} \qquad M_2 = gen\{(1,0,1,0);(2,1,-1,0)\} + \vec{p}.$$

Hasta acá nos aseguramos de que $\dim(M_1) = \dim(M_2) = 2$ y $\dim(M_1 \cap M_2) = 1$ y que las dos variedades son paralelas a $L_1 \vee L_2$. Solo resta escoger $\vec{p}$ de manera que las distancias que el enunciado quiere sean 1.

Hagamos un impasee para recordar la formula de distancia entre dos variedades $V_1 = S_1 + \vec{q_1}$ y $V_2 = S_2 + \vec{q_2}$, luego la distancia es:

$$d(V_1; V_2) = ||P_{(S_1+S_2)^\perp}(q_1 - q_2)||.$$

Aplicando esta formula a nuestro caso:

$$d(M_1; L_1 \vee L_2) = ||P_{S^\perp}(\vec{p} - (0,0,1,0))||$$

donde $S = S_1 + S_2$ con S_1 el subespacio asociado a M_1 que ya lo conocemos, es $gen\{(1,0,1,0);(1,1,1,-1)\}$ y S_2 el asociado a $L_1 \vee L_2$ que es $gen\{(1,0,1,0);(1,1,1,-1);(2,1,-1,0)\}$, ya que $S_1 \subseteq S_2$, se tiene que $S_1 + S_2 = S_2$ y por lo tanto $S^\perp$ no es otro que $S_2^\perp$.

Cabe destacar que lo mismo hubiera pasado al calcular la distancia entre M_2 y $L_1 \vee L_2$, con lo cual ambas distancias son iguales, y en función de lo dicho las podemos escribir así (llamando (x_1, x_2, x_3, x_4) a $\vec{p}$):

$$d(M_1; L_1 \vee L_2) = d(M_2; L_1 \vee L_2) = ||P_{gen\{(-1,3,1,3)\}}(x_1, x_2, x_3 - 1, x_4)||$$

ya que $(-1,3,1,3)$ genera el ortogonal de $gen\{(1,0,1,0);(1,1,1,-1);(2,1,-1,0)\}$. En fin, igualando a 1 y escribiendo explícitamente la proyección queda:

$$\begin{aligned}
1 &= ||\frac{\langle(-1,3,1,3);(x_1,x_2,x_3-1,x_4)\rangle}{||(-1,3,1,3)||^2}(-1,3,1,3)|| \\
&= ||\frac{-x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 1}{20}(-1,3,1,3)|| \\
&= \frac{|-x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 1|}{20}\sqrt{20}
\end{aligned}$$

paso multiplicando y acomodo un poco la raiz,

$$2\sqrt{5} = |-x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 1|$$

una solución es por ejemplo $\vec{p} = (-1, 0, 2\sqrt{5}, 0)$. Quedando el resultado final:

$$M_1 = gen\{(1,0,1,0);(1,1,1,-1)\} + (-1,0,2\sqrt{5},0)$$
$$M_2 = gen\{(1,0,1,0);(2,1,-1,0)\} + (-1,0,2\sqrt{5},0).$$