Proposición. *Las unidades de* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *son los números de la forma* $\pm(1+\sqrt{2})^n$ *con* $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Es claro que los números de la forma $\pm(1+\sqrt{2})^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ son unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, ya que $1+\sqrt{2}$ es una unidad.

Toda unidad de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ se puede escrbir como $\pm u^{\pm 1}$ donde $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es una unidad y además $u \geq 1$. Luego basta ver que si $u \geq 1$ es una unidad entonces es de la forma $u = (1+\sqrt{2})^n$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. Si $u \geq 1$ es una unidad, consideramos $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $(1+\sqrt{2})^n \leq u < (1+\sqrt{2})^{n+1}$. Tenemos $1 \leq u(1+\sqrt{2})^{-n} < 1+\sqrt{2}$. Por lo tanto basta ver que si $1 \leq u < 1+\sqrt{2}$ es una unidad entonces $u = 1$.

Tenemos que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es una unidad si y solamente si la norma $a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$ es una unidad. Entonces queremos ver que la única solución entera de $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ que cumple $1 \leq a + b\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$ es $(a, b) = (1, 0)$.

<u>Primer caso:</u> $a^2 - 2b^2 = 1$ y $1 \leq a + b\sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}$. Tenemos $a^2 = 1 + 2b^2$ luego $|a| = \sqrt{1+2b^2} \geq \sqrt{2}|b|$. Entonces la desigualdad $1 \leq a + b\sqrt{2}$ nos dice que a es positivo, luego $a = \sqrt{1+2b^2}$ y tenemos $1 - b\sqrt{2} \leq \sqrt{1+2b^2}$. Veamos que $b \geq 0$. Si tuvieramos $b < 0$, entonces podemos elevar al cuadrado y se tiene $(1-b\sqrt{2})^2 \leq 1 + 2b^2$. Por lo tanto $1 + 2b^2 - 2\sqrt{2}b \leq 1 + 2b^2$. O sea que $b \geq 0$, contradicción. Pasando en limpio, tenemos $a > 0$ y $b \geq 0$. Dado que $a + b\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$, las únicas soluciones posibles son $(1, 0)$ y $(2, 0)$. Pero $(a, b) = (2, 0)$ no es una unidad. Luego en este caso la única solución es $(1, 0)$.

<u>Segundo caso:</u> $a^2 - 2b^2 = -1$ y $1 \leq a + b\sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}$. Tenemos $a^2 = 2b^2 - 1$. Luego $|a| = \sqrt{2b^2 - 1} \leq \sqrt{2}|b|$ y además $|b| \geq 1$, luego $|a| > 1$. De $1 \leq a + b\sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}$ obtenemos que $b > 0$ y $a < 0$. Entonces tenemos $1 \leq -\sqrt{2b^2-1} + \sqrt{2}b$. Luego $\sqrt{2b^2-1} \leq \sqrt{2}b - 1$ o sea que $2b^2 - 1 \leq 2b^2 + 1 - 2\sqrt{2}b$. Finalmente nos queda $\sqrt{2}b \leq 1$. Luego en este caso no hay soluciones.

$\square$