Práctica 5

Nota: En esta práctica todos los anillos tienen unidad. Cuando no se aclare otra cosa, A-módulo significará A-módulo a izquierda.
Un A-módulo M se dice *fiel* si $aM = 0, a \in A \Longrightarrow a = 0$.
Si A es un anillo, un *sistema de representantes de los A-módulos simples* es un conjunto de A-módulos simples $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ tal que todo A-módulo simple es isomorfo a exactamente un elemento de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

---

1. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción $\cdot$ de A sobre M define en M una estructura de A-módulo a izquierda. Decidir cúales son fieles.

   a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$, $a \cdot m = am$.
   b) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot m = am$, $(n \in \mathbb{N})$.
   c) $A = M_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot m = am$, $(n \in \mathbb{N})$.
   d) $A = M_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}$, $a \cdot m = \det(a)\, m$, $(n \in \mathbb{N})$.
   e) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot (m_1, m_2, \dots, m_n) = (a(1)m_1, a(2)m_2, \dots, a(n)m_n)$, $(n \in \mathbb{N})$.
   f) $A = \mathbb{Z}_{nk}$, $M = \mathbb{Z}_n$, $a \cdot m = r_n(am)$, $(n, k \in \mathbb{N})$.

2. Sean A y B anillos, M un B-módulo y $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot m = \varphi(a) \cdot m$ define sobre M una estructura de A-módulo, que denotamos $\varphi^* M$.

3. Determinar en cada uno de los siguientes casos si S es un submódulo del A-módulo M.

   a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{R}i$.
   b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid \det(a_{ij}) = 0\}$, $(n \in \mathbb{N})$.
   c) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$, $(n \in \mathbb{N})$.
   d) $A = \mathbb{Z}[X]$, $M = \mathbb{Z}[X]$, $S = \{f \in M \mid f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}$.

4. Sean M un A-módulo, S un subconjunto de M y N un submódulo de M. Probar que $(N : S) = \{a \in A \mid as \in N\ \forall s \in S\}$ es un ideal a izquierda de A.

5. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.

6. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $2 < n < m$. Probar en cada uno de los siguientes casos que f es un morfismo de A-módulos. Hallar el núcleo y la imagen, y determinar si f es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción y/o isomorfismo.

   a) $A = \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$.
   b) $A = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$
   c) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^m$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots 0)$.
   d) A un anillo cualquiera, $f : A^m \to A^n$, $f(a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_n)$.
   e) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^2$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + a_n, a_n)$.
   f) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^n$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \cdots + a_n)$.

g) A un anillo cualquiera, fijo $a_0 \in A$, $f : A[X] \to A$, $f(g) = g(a_0)$.

7. Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-módulos y $f : V \to W$ una función. Probar que f es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos si y sólo si es un morfismo de grupos.

8. Sean M y N dos A-módulos a izquierda. Probar lo siguiente.

   (a) $Hom_A(M, N)$ tiene estructura de $\mathcal{Z}(A)$-módulo a izquierda vía: $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$.

   (b) $Hom_A(A, N) \simeq N$ como $\mathcal{Z}(A)$-módulos.

   (c) Si además M es un *bimódulo* - es decir M es también un A-módulo a derecha y $(am)b = a(mb)$, $(a, b \in A, m \in M)$ - entonces $Hom_A(M, N)$ tiene estructura de A-módulo a izquierda mediante la acción $(a * f)(m) = f(ma)$.

   (d) Observar que A es un A-bimódulo y probar que la acción de A en $Hom_A(A, N)$ mediante $*$ extiende a la acción de $\mathcal{Z}(A)$ del ítem (a).

   (e) $Hom_A(A, N) \simeq N$ como A-módulos.

9. Caracterizar en cada uno de los siguientes casos el A-módulo cociente M/S.

   a) $M = A^n$, $S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.

   b) $M = A[X]$, $S = \{f \in M \mid f(1) = 0\}$.

   c) $M = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid a_{i1} = 0 \; \forall \; 1 \leq i \leq n\}$.

10. Sean M, N A-módulos y $f : M \to N$ una función. Probar que f es un morfismo si y sólo si el *gráfico de* f, $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ es un submódulo de $M \oplus N$.

11. Sea k un cuerpo. Una k*-álgebra* es un anillo A junto con un morfismo de anillos $\iota : k \to \mathcal{Z}(A)$. Probar lo siguiente.

    a) Si A es una k-álgebra, la fórmula $\lambda \cdot a := \iota(\lambda)a$, $(\lambda \in k, a \in A)$ define en A una estructura de k-espacio vectorial con la propiedad: $(\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$, $(\lambda \in k, a, b \in A)$.

    b) Si A es una anillo con una estructura de k-espacio vectorial que verifica la propiedad del ítem anterior, entonces A es una k-álgebra vía el morfismo $\iota : k \to \mathcal{Z}(A)$, $\iota(\lambda) := \lambda \cdot 1$.

    c) Si A es una k-álgebra y M es un módulo entonces el producto: $\lambda * m := \iota(\lambda)m$ define en M una estructura de k-espacio vectorial. Más aún, para esta estructura se tiene que la imagen del morfismo canónico $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$, $a \mapsto (m \mapsto am)$ está contenida en el subanillo $\mathrm{End}_k M \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$.

    d) Sea M un grupo abeliano. Probar que es lo mismo darle una estructura de A-módulo a M que darle una estructura de k-espacio vectorial y dar un morfismo de anillos $\rho : A \to \mathrm{End}_k(M)$ que además es k-lineal.

12. Sean A y B k-álgebras. Un *morfismo de* k*-álgebras* $f : A \to B$ es un morfismo de anillos que es también una transformación k-lineal. Probar lo siguiente.

    a) Las aplicaciones ι y ρ del ejercicio anterior son morfismos de k-álgebras.

    b) Sea $\rho : A \to \mathrm{End}_k(A)$ el morfismo de k-álgebras que le corresponde al A-módulo A via la correspondencia dada más arriba. Probar que ρ es inyectivo. Concluir que toda k-álgebra de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$ para algún $n \leq \dim_k A$.

13. Sea M un A-módulo.

    a) Probar que si $f \in End_A(M)$ verifica $f^2 = f$, entonces $M = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

    b) Probar que si M_1 y M_2 son submódulos de M tales que $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $f \in End_A(M)$ tal que $f^2 = f$, $M_1 = \ker f$ y $M_2 = \operatorname{im} f$.

14. Para cada uno de los siguientes anillos A, hallar todos los ideales a izquierda maximales. Dar también una lista completa de representantes de los A-módulos a izquierda simples. Decidir cuáles son semisimples.

    (a) $A = \mathbb{Z}$. (b) $A = \mathbb{C}[x]$. (c) $A = \mathbb{R}[x]$.

    (d) $A = M_n(k)$, con k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.

    (e) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in k \right\} \subset M_2(k)$, con k un cuerpo.

    (f) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b, c \in k \right\} \subset M_2(k)$, con k un cuerpo.

15. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es $\mathbb{Z}_n$ un anillo semisimple?

16. Caracterizar los anillos semisimples A que poseen un solo ideal maximal.

17. Sea k un cuerpo y $f : M_n(k) \to M_m(k)$ un morfismo de k-álgebras $(n, m \in \mathbb{N})$. Probar que n divide a m.

18. Sea A un anillo conmutativo. Probar que A es semisimple si y sólo si es isomorfo a un producto directo de un número finito de cuerpos.

19. Sea k un cuerpo y $A := k^{\mathbb{N}}$ con la estructura de producto de anillos. Probar que A no es un anillo semisimple. Probar también que todo ideal principal de A es un sumando directo.

20. Sea $\mathcal{H}$ el grupo de los cuaterniones. Dar una lista completa de representantes de los módulos simples a izquierda del anillo $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$.

21. Probar que:

    a) Si A y B son anillos y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A \times B) \simeq M_n(A) \times M_n(B)$.

    b) Si A es un anillo y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(M_m(A)) \simeq M_{nm}(A)$.

    c) Si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A)$ es un anillo semisimple.

22. Sean A_1, A_2 anillos y $\pi_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ ($i = 1, 2$) las proyecciones canónicas. Vía estos morfismos, todo A_i-módulo M adquiere una estructura de $A_1 \times A_2$-módulo $\pi_i^* M$ (cf. Ejercicio 2). Probar que:

    a) Si M es un $A_1 \times A_2$ módulo, entonces existen A_i-módulos M_i $(i = 1, 2)$ tales que $M = \pi_1^* M_1 \oplus \pi_2^* M_2$.

    b) Si $\mathcal{S}_i$ es un sistema de representantes de A_i-módulos simples ($i = 1, 2$), entonces

    $$\{\pi_1^*(M) : M \in \mathcal{S}_1\} \cup \{\pi_2^*(M) : M \in \mathcal{S}_2\}$$

    es un sistema completo de representantes de $A_1 \times A_2$-módulos simples.

23. Sea k un cuerpo. Caracterizar los polinomios $p \in k[X]$ tales que $A = k[X]/\langle p \rangle$ es un anillo semisimple.

24. Sea $A \subset M_n(\mathbb{C})$ una subálgebra. Decimos que A es una C^*-*álgebra* si $a^* := \overline{a}^t \in A$ $(\forall\ a \in A)$. Un C^*-módulo sobre A es un módulo (y por lo tanto un $\mathbb{C}$-espacio vectorial) $\mathbb{V}$ con un producto interno hermitiano $\langle , \rangle$ tal que $\langle av, w\rangle = \langle v, a^*w\rangle$ $\forall v, w \in V$, $a \in A$.

    Sea A una C^*-álgebra. Probar lo siguiente.

    a) Todo C^*-módulo de A es semisimple como A-modulo.

    b) La aplicación $\langle , \rangle : A \times A \to \mathbb{C}$, $\langle a, b\rangle = Tr(ab^*)$ es un producto interno hermitiano y hace que A, con su estructura usual de A-módulo a izquierda, sea un C^*-módulo.

    c) A es un anillo semisimple.

25. Demostrar que si $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal autoadjunta (con el producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$), entonces T es diagonalizable.

26. *a*) Sea D un anillo de división. Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(D)$ está generado por un elemento idempotente.

    b) Sea A un anillo semisimple. Probar que todo ideal a izquierda de A está generado por un elemento idempotente.
