

PRÁCTICA 4

---

**Nota:** *A siempre se supondrá con unidad.*

**Ejercicios**

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar en cada uno de los siguientes casos que  $(A, +, \cdot)$  es un anillo. Decidir cuáles son conmutativos, dominios íntegros, anillos de división o cuerpos.

a)  $M_n(\mathbb{R})$  con la suma y el producto de matrices.

b)  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  con  $d \in \mathbb{Z}$  libre de cuadrados y con la suma y el producto de números complejos.

c)  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$  con  $X$  un conjunto,  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto de subconjuntos de  $X$  y  $\Delta$  la diferencia simétrica.

d)  $(\text{End}(G), +, \circ)$  con  $G$  grupo abeliano.

e)  $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z}, a_g \neq 0, \text{ sólo para finitos } g \in G\}$  con  $G$  grupo y

$$\left(\sum a_g \cdot g\right) + \left(\sum b_g \cdot g\right) = \sum (a_g + b_g) \cdot g; \quad \left(\sum a_g \cdot g\right) \cdot \left(\sum b_g \cdot g\right) = \sum \left(\sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2}\right) \cdot g.$$

2. Dar ejemplos de un anillo que no sea dominio íntegro y de un dominio íntegro que no sea anillo de división.

3. Hallar los divisores de cero y las unidades del anillo  $A = \mathcal{C}[0, 1]$  de funciones continuas definidas de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ .

4. Sea  $A$  un anillo. El grupo de unidades de  $A$  es el conjunto

$$\mathcal{U}(A) = \{u \in A : u \text{ es inversible}\}.$$

- Probar que la multiplicación de  $A$  hace de  $\mathcal{U}(A)$  un grupo.
- Probar que  $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n : \text{mcd}(m, n) = 1\}$ . Deducir que  $\mathbb{Z}_n$  es cuerpo si y sólo si  $n$  es primo.
- Sea  $G$  un grupo. Probar que  $1 \cdot G \subset \mathcal{U}(\mathbb{Z}[G])$ . Mostrar que no vale la igualdad.

5. Hallar las unidades de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}[X]$ .

6. Probar que si  $A$  es un anillo y  $G$  un grupo, la aplicación,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) &\rightarrow \text{Hom}(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G, \end{aligned}$$

es una biyección.

7. Sea  $x \in A$  un elemento nilpotente. Probar que  $1 + x$  y  $1 - x$  son unidades.
8. Sea  $A$  un dominio íntegro finito. Probar que  $A$  es un cuerpo.
9. En cada uno de los siguientes casos, decidir si  $B$  es un subanillo de  $A$ :
- $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{Q}$ .
  - $A = \mathbb{Z}$  y  $B = \mathbb{N}$ .
  - $A = \mathbb{C}$  y  $B = \mathbb{Z}[i]$ .
  - $A = \mathbb{Z}[X]$  y  $B = \{f = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in A \mid a_1 = 0\}$ .
10. Sea  $B$  un subanillo de un anillo  $A$ . Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- $A$  dominio íntegro  $\Rightarrow B$  dominio íntegro.
  - $B$  dominio íntegro  $\Rightarrow A$  dominio íntegro.
  - $A$  cuerpo  $\Rightarrow B$  cuerpo.
  - $B$  cuerpo  $\Rightarrow A$  cuerpo.
11. Sean  $K$  un cuerpo y  $n \in \mathbb{N}$ .
- Sean  $V \subseteq K^n$  un subespacio vectorial e  $I_V$  el subconjunto de  $M_n(K)$  formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a  $V$ . Probar que  $I_V$  es un ideal a izquierda de  $M_n(K)$ .
  - Probar que todo ideal a izquierda de  $M_n(K)$  es de la forma del definido en el ítem anterior. (Sugerencia: tomar  $V$  como el conjunto formado por todas las filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio).
  - Probar que  $M_n(K)$  es *simple* (i.e. no tiene ideales biláteros no triviales).
  - Probar que  $\mathcal{Z}(M_n(K)) = K \cdot I$ .
12. Hallar todos los ideales de  $\mathbb{Z}$  y de  $\mathbb{Q}[X]$ .
13. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $\langle a, b \rangle = \langle \text{mcd}(a, b) \rangle$ .
14. Sea  $d \in \mathbb{Z}$  libre de cuadrados.
- Probar que si  $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$  con  $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ , entonces  $a = a'$  y  $b = b'$ .
  - Probar que si  $d$  es impar,  $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \pmod{2}\}$  es un ideal de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .
15. Hallar un ideal de  $\mathbb{Z}[X]$  que no pueda generarse por un único elemento.
16. Sea  $A$  un anillo. Probar que  $A$  es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de  $A$  son  $0$  y  $A$ .

17. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . En cada uno de los siguientes casos, decidir si  $f$  es un morfismo de anillos:

- a)  $f : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(g) = g(1)$ .
- b)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$ .
- c)  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(C) = \det(C)$ .
- d)  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $f(m) = m^p$ , con  $p$  un número primo.

18. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Todo morfismo de anillos no nulo que sale de un anillo de división es inyectivo.
- b) Si  $A$  es un anillo conmutativo tal que todo morfismo de anillos no nulo que sale de  $A$  es inyectivo, entonces  $A$  es un cuerpo.
- c) Si  $A$  es un anillo tal que todo morfismo no nulo que sale de  $A$  es inyectivo, entonces  $A$  es un anillo de división.

19. Probar que el único morfismo de anillos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función identidad.

20. Hallar todos los morfismos de anillos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ .

21. Probar que  $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1 \rangle$  y  $\mathbb{R}[X, Y]/\langle XY \rangle$  no son cuerpos.

22. Hallar los divisores de cero y las unidades de  $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3 \rangle$ .

23. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Mostrar isomorfismos entre los siguientes anillos.

- a)  $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$  y  $\mathbb{Z}_5$ .
- b)  $\mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle Y - X^5, Z - Y^5 \rangle$  y  $\mathbb{R}[X]$ .
- c)  $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle$  y  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$ .
- d)  $\mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1 \rangle$  y  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ .

24. Sea  $L_n = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}/I$ , donde  $I = \langle \alpha_i^* \alpha_j - \delta_{i,j}, \sum_i \alpha_i \alpha_i^* - 1 \rangle$ .

- a) Probar que  $L_n \neq 0$ . Sea  $L_n^{op}$  el anillo opuesto. Probar que existe un único isomorfismo  $L_n \rightarrow L_n^{op}$ , que manda  $\alpha_i \mapsto \alpha_i^*$  y  $\alpha_i^* \mapsto \alpha_i$ .
- b) Sea  $x \mapsto x^*$  el isomorfismo del ítem anterior. Probar que  $x^{**} = x$ .
- c) Sea  $u \in L_n$  tal que  $u^*u = uu^* = 1$ . Probar que hay un único  $\phi_u \in \text{End}(L_n)$  tal que  $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ , ( $x \in L_n$ ) y tal que  $\phi(\alpha_j) = u\alpha_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ). Probar que  $u = \sum_j \phi_u(\alpha_j)\alpha_j^*$ .
- d) Probar que si  $\phi \in \text{End}(L_n)$  tal que  $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ , ( $x \in L_n$ ) entonces existe  $u \in L_n$  tal que  $u^*u = uu^* = 1$  y tal que  $\phi = \phi_u$ .