Sea $I := \langle 1+\sqrt{-5}\rangle \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Vamos a calcular el ideal inverso I^{-1}.

Sabemos que

$$I^{-1} = \{\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\sqrt{-5} : \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\sqrt{-5} I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\},$$

por lo tanto basta buscar las soluciones de $(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ suponiendo que $(a : a') = 1$ y $(b : b') = 1$.

Como

$$(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}) = (\frac{a}{a'} - 5\frac{b}{b'}) + (\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'})\sqrt{-5}$$

se tiene que

$$\frac{a}{a'} - 5\frac{b}{b'} \in \mathbb{Z}$$

y

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} \in \mathbb{Z}.$$

Restando los términos, se obtiene $6\dfrac{b}{b'} = k$ con $k \in \mathbb{Z}$, y multiplicando por 5 el segundo y sumando los términos también podemos decir que $6\dfrac{a}{a'} = k'$ con $k' \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto,

$$\frac{k'}{6} - 5\frac{k}{6} = \frac{k' - 5k}{6} \in \mathbb{Z}$$

y

$$\frac{k'}{6} + \frac{k}{6} = \frac{k' + k}{6} \in \mathbb{Z},$$

lo que significa que

$$k' + k \equiv 0 (mod 6).$$

Luego,

$$I^{-1} = \{\frac{-k}{6} + q + \frac{k}{6}\sqrt{-5} : k, q \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{k}{6}(-1+\sqrt{-5}) + q : k, q \in \mathbb{Z}\}.$$
