Álgebra I
Práctica 6 - Números Complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i \cdot z)$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$

ii) $z = 5\,i(1+i)^4$

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2\overline{(1-3\,i)}$

iv) $z = i^{17} + \dfrac{1}{2}\,i(1-i)^3$

v) $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{179}$

vi) $z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$

vii) $z = \overline{1-3\,i}^{\,-1}$

2. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z

ii) w

iii) $z+w$

iv) $z-w$

v) $-z$

vi) $2z$

vii) $\dfrac{1}{2}w$

viii) iz

ix) $\overline{z}$

x) $\overline{3z+2w}$

xi) $\overline{iz}$

xii) $|z|$

xiii) $|2z|$

xiv) $|z+w|$

xv) $|z-w|$

xvi) $|\overline{w-z}|$

3. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3-4i$

iv) $z = -15+8i$

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3+\sqrt{3}\,i$

ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$

iii) $(-1-i)^{-1}$

iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$

v) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{-5}$

vi) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}$

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2 \text{ y } \dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \arg(-i\,z) > \dfrac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$.

6. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

7. Hallar en cada caso las raíces n-avas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8,\ n = 6$

ii) $z = -4,\ n = 3$

iii) $z = -1+i,\ n = 7$

iv) $z = 2\,i\,(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)^{-1}$, $n = 11$

v) $z = (2-2i)^{12},\ n = 6$

vi) $z = 1,\ n = 8$.

8. i) Calcular $w + \overline{w} + (w+w^2)^2 - w^{38}(1-w^2)$ para cada $w \in G_7$.

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

9. Determinar las raíces n-ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

10. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$ ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$

11. i) Calcular la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

ii) Calcular la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad para p primo.

12. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

13. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

14. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

15. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} &= w^5 \\ w^{14n} &= w^{21} \end{cases}$$

16. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega\, b, \ \text{para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?