Práctica 3: La topología de los espacios euclídeos

1. Decida si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, o acotados:

   a) $\mathbb{N}$;

   b) $\mathbb{Q}$;

   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;

   d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

   e) $(0, 1]$;

   f) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

   g) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Pruebe las siguientes afirmaciones.

   a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$. ¿Vale la recíproca? ¿Es cierto que si $S^\circ = T^\circ$ entonces $S \subset T$?

   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Qué ocurre con el interior de la intersección de una familia finita de conjuntos? ¿y si la familia es infinita?

   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿En qué casos vale la igualdad?

   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

   f) $(\mathbb{R} \setminus S)^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{S}$. ¿Es cierta la igualdad que se obtiene intercambiando interior y clausura?

3. Encuentre el interior, la clausura y la frontera de cada conjunto:

   a) $[0, 1]$;

   b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

   c) $[-1, 0) \cup \{1\}$;

   d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

   f) $\mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones.

   a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

   b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

   c) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

d) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus S}$.

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $p \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de S si $p \in \overline{S \setminus p}$. Notamos por S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Determine S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 3.

   b) Un punto $p \in S$ es un *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \cap S = \{p\}$. Muestre que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

6. * Encuentre los puntos de acumulación y la clausura del conjunto $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

7. Determine todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

8. Decida si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, o acotados.

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.

   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.

   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

9. ¿Siguen siendo ciertas las afirmaciones del Ejercicio 2 si S y T son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$?

10. Encuentre los puntos de acumulación y la clausura del conjunto

$$S = \{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ definimos $I_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \subseteq \mathbb{R}$. Muestre que $(0,1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup\limits_{n \in \mathcal{F}} I_n$? ¿Es compacto el conjunto $(0,1)$?

12. Si $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$ para cada $n \geq 1$, muestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

13. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$;

    b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

    c) $\mathbb{R}$;

    d) $[0, 1] \cup [100, 1000]$;

    e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

    f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

14. Probar que si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ entonces tiene mínimo y máximo.

15. * Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto, que su mínimo es $\liminf x_n$ y su máximo es $\limsup x_n$.

16. Sean S, $T \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos compactos. Probar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

17. Probar que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

18. Probar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

19. * Probar que si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces los conjuntos $S = \{x + y : x, y \in K\}$ y $P = \{xy : x, y \in K\}$ son compactos.

20. Una *norma* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

    - $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$;
    - $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
    - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo x, $y \in \mathbb{R}^n$.

    a) Muestre que las funciones $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

    $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,$$
    $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$
    $$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

    para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son normas. Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$ llamamos *bola centrada en x de radio ε* al conjunto

    $$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

    b) Muestre que existen constantes positivas c, c', d, d' tales que

    $$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1, \qquad d\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq d'\|x\|_\infty$$

    para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
    Sugerencia: Primero resuelva el problema en el caso $n = 2$. Dibuje las bolas de radio 1 centradas en cero para las tres normas.

    c) Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto con respecto a $\|\cdot\|$ si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Muestre que un conjunto es abierto con respecto a $\|\cdot\|_1$ si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_2$, si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.

    d) Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, decimos que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a $\|\cdot\|$ si

    $$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

    Muestre que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.