
Ejercicio: En un grupo de 100 personas, 32 saben portugués y 56 saben inglés. Se selecciona una persona al azar y se observa qué idiomas sabe.

Sabiendo que la probabilidad de que la persona seleccionada sepa inglés dado que no sabe portugués es $\frac{11}{17}$, hallar la probabilidad de que no sepa portugués dado que sabe inglés.

Armemos un espacio de probabilidad que sirva para describir el experimento:

Definimos $\Omega = \{(i, p), (*i, p), (i, *p), (*i, *p)\}$, donde $*$ significa “no”, y $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Nos falta definir una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que sea una probabilidad. Por el ejercicio 2 de la práctica 1, basta definir \mathbb{P} en cada $\omega \in \Omega$.

Pongamos entonces $\mathbb{P}((i, p)) = p_{11}$, $\mathbb{P}((*i, p)) = p_{01}$, $\mathbb{P}((i, *p)) = p_{10}$, $\mathbb{P}((*i, *p)) = p_{00}$ con $p_{11} + p_{01} + p_{10} + p_{00} = 1$.

Si consideramos los eventos $I = \{\text{“sabe inglés”}\} = \{(i, p), (i, *p)\}$ y $P = \{\text{“sabe portugués”}\} = \{(i, p), (*i, p)\}$, el enunciado nos dice que $\mathbb{P}(I) = p_{11} + p_{10} = \frac{56}{100}$ y $\mathbb{P}(P) = p_{11} + p_{01} = \frac{32}{100}$. Notemos que hasta ahora tenemos tres condiciones sobre los p_{ij} y nos falta una (l.i.) para que quede un sistema con solución única.

El otro dato del problema es que $\mathbb{P}(I | P^c) = \frac{\mathbb{P}(I \cap P^c)}{\mathbb{P}(P^c)} = \frac{\mathbb{P}(I \cap P^c)}{1 - \mathbb{P}(P)} = \frac{p_{10}}{1 - \frac{32}{100}} = \frac{11}{17}$, por lo tanto $p_{10} = \frac{11}{17} \cdot (1 - \frac{32}{100}) = \frac{44}{100}$.

Sabiendo esto, podemos despejar el resto de los p_{ij} obteniendo: $p_{11} = \frac{56}{100} - \frac{44}{100} = \frac{12}{100}$, $p_{01} = \frac{32}{100} - \frac{12}{100} = \frac{20}{100}$ y $p_{00} = 1 - \frac{44}{100} - \frac{12}{100} - \frac{20}{100} = \frac{24}{100}$.

De esta forma, tenemos definido un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, el cual **no es equiprobable**, ya que las probabilidades puntuales no son iguales.

Por último, resolvamos lo que pide el ejercicio: $\mathbb{P}(P^c | I) = \frac{\mathbb{P}(I | P^c) \cdot \mathbb{P}(P^c)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{\frac{11}{17} \cdot (1 - \frac{32}{100})}{\frac{56}{100}} = \frac{11}{14}$.