

Nombre y apellido Número de libreta

1	2	3	4	5	Nota

El examen se aprueba con 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.

1. En un curso de n personas, el profesor quiere realizar el siguiente experimento: el objetivo es aproximar el largo de una mesa, cuya longitud exacta es m . Para lograr el objetivo, cada alumno medirá la mesa y luego el profesor calculará el promedio de todas las mediciones para obtener la aproximación. Supongamos que en cada medición i se comete un error aleatorio X_i con $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\text{Var}(X_i) = 3$, $i = 1, \dots, n$ y asumimos que los errores de distintas personas son independientes.

Por lo tanto, la medición del alumno i será una variable aleatoria Y_i con $Y_i = m + X_i$, y la aproximación calculada por el profesor será $\bar{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$.

- a) (8p) Hallar n de manera que el profesor pueda tener al menos 95 % de seguridad de que el error en la aproximación es a lo sumo 0,1.
- b) Supongamos que $m = 20$ y que los errores X_i se distribuyen uniformemente en $[-3, 3]$.
- 1) (2p) Verificar que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\text{Var}(X_i) = 3$ para todo $i = 1, \dots, n$
- 2) (10p) Sea Z la cantidad de personas tales que su medición estuvo en el intervalo $[19, 21]$. Hallar la esperanza y la varianza de Z .

2. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, definidas en un mismo espacio de probabilidad, con distribuciones $F_{X_n}(x) = \frac{e^{n(x-1)}}{1 + e^{n(x-1)}}$ si $x \geq 0$ y 0 si no.

- a) (8p) Hallar X , el límite en distribución de X_n . Explicitar $F_X(x)$.
- b) (12p) Probar que $X_n \xrightarrow{cs} X$.

3. a) (12p) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1, 1]$.

Sugerencia: Utilizar la identidad $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$.

- b) (8p) Sea $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{2^k}.$$

Probar que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[0, 1]$.

4. En un ecosistema, cada bacteria implanta 50 bacterias antes de morir. Cada una de estas nuevas bacterias sobrevive con probabilidad $p = 0,2$ y, en ese caso, implanta 50 nuevas bacterias.

Se inicia un experimento colocando una bacteria en un ecosistema virgen.

- a) (6p) ¿Cuál es la cantidad esperada de bacterias sobrevivientes en la segunda generación?
b) (7p) Sea Y la cantidad de bacterias sobrevivientes en la segunda generación. Demostrar que

$$P(Y \in [50, 150]) > 0,65.$$

- c) (7p) Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿cuál es la cantidad esperada de bacterias sobrevivientes en la n -ésima generación?

5. Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} \mathbf{1}_{[\alpha, +\infty)}(x).$$

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra de X .

- a) (4p) Probar que $X - \alpha \sim \text{Exp}(\lambda)$.
b) (8p) Hallar estimadores de α y λ por el método de los momentos y probar que son consistentes.
c) (8p) Si $\alpha = 5$, hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ . ¿Es consistente?