Nombre y apellido .... Número de libreta ....

1	2	3	4	5	Nota

El examen se aprueba con 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.

1. En un pueblo andino en el que nieva todos los días de julio, se mide la cantidad de nieve caída cada día del mes. Un día del mes se considera un *récord* si la cantidad de nieve caída ese día es la máxima entre los días medidos hasta ese momento del mes. De esta forma, por ejemplo, el primer día de julio siempre es un *récord*.

   Si se sabe que la cantidad de nieve caída (en centímetros) en un día sigue una distribución uniforme $[0, 50]$, y que las cantidades de nieve caidas en días distintos son independientes.

   a) (12p) ¿Cuántos *récord* se espera tener a lo largo del mes de julio?

   b) (8p) ¿Cuál es el valor esperado de nieve caída en el último *récord* del mes?

   Aclaración: el mes de julio tiene 31 días.

2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $P(X_1 = 0) = 1$ y para $k \geq 2$:

$$P(X_k = k) = \frac{1}{2k\log(k)}, \quad P(X_k = -k) = \frac{1}{2k\log(k)}, \quad P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k\log(k)},$$

   Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) (6p) Probar que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} 0$.

   b) (7p) Sea $A_k = \{|X_k| > \frac{k}{2}\}$. Probar que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

   c) (7p) Probar que $P(\frac{S_n}{n} \to 0) = 0$.

3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid con media $\mu_X \neq 0$, varianza σ_X^2, y sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid con media μ_Y, varianza σ_Y^2, tal que Y_j, X_k son independientes para cualquier elección de j, k.

   a) (12p) Hallar el límite en distribución de $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y_n}}{\overline{X_n}} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right)$

   b) (8p) Si g es una función continua tal que $g(\mu_Y) = \sigma_X$, probar que $W_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu_X}{g(\overline{Y_n})}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1)$

4. Martín tiene una gata color gris de 2 años. Su vecino Maxi, también tiene una gata gris pero de 1,5 años. Un día Martín llega a su casa y se encuentra con las dos gatas adentro. Para decidir cuál es la suya lo que hace es observar a una gata y contar la cantidad de minutos que pasan hasta que maulla por primera vez.

   Sea Y la edad de la gata observada, donde $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}$ y $\mathbb{P}(Y = 1,5) = \frac{2}{3}$ y supongamos que la cantidad de minutos X que pasan hasta que maulla la gata, dado que $Y = y$, es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\frac{1}{2y-1}$.

   a) (6p) Hallar la densidad de X y calcular $\mathbb{P}(X < 2)$.

   b) (8p) Hallar $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

   c) (6p) Calcular la probabilidad de que Martín haya observado a su gata y haya tenido que esperar al menos 2 minutos.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

   a) (8p) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) (6p) Decidir si el estimador hallado es insesgado o asintóticamente insesgado.

   c) (6p) Decidir si el estimador hallado es consistente.