Ejercicios que se desarrollarn en clase – práctica turno noche

1. Ana, Beto y Carola trabajan de lunes a viernes en una pizzería. Cada uno de ellos tiene un día de franco por semana. De cuántas formas posibles pueden elegir el franco de manera que cada día hábil haya por lo menos 2 personas trabajando?

2. En un casamiento, 6 hombres y 4 mujeres se estan por sacar un foto.

   (a) Si se las ordena en fila, cuantas fotos distintas pueden hacerse?

   (b) el fotografo decide ahora que los varones esten de pie en el fondo y las mujeres sentadas adelante. Cuantas de estas fotos, distintas entre si, pueden sacarse?

3. Del grupo de personas del ejemplo anterior, se eligen 6 que se ponene en orden para sacarse otra foto. De cuántas maneras se pueden elegir estas 6 personas?

4. (a) Cuántas patentes diferentes se pueden formar con 3 letras y 3 números?

   (b) Cuántas con todas letras distintas y todos números distintos?

   (c) Cuántas patentes hay que tiene al menos una letra A?

5. Ventitrés jugadores son elegidos para ir al mundial. Si hay 3 arqueros, 7 defensores, 8 mediocampistas y 5 delanteros entre los convocados, cuántos equipos diferentes pueden formarse cuando juegan con un esquema de 4,4,2?

6. Una pareja tiene 5 hijos. Asumiendo que en cada nacimiento es igualmente probable que nazca un varón que una nena, calcular la probabilidad de que:

   (a) todos los hijos sean del mismo sexo.

   (b) los 3 mayores sean varones y el resto nenas.

   (c) haya exactamente 3 varones.

   (d) los dos mayores sean varones.

   (e) haya al menos una nena.

7. La construcción de un edificio en el plazo programado está relacionada con los siguientes acontecimientos:
   $A = \{$*La estructura interior se completa a tiempo*$\}$
   $B = \{$*La estructura exterior se completa a tiempo*$\}$
   La probabilidad de que alguna de las dos estructuras se complete a tiempo es 0.8 y la probabilidad de que exactamente una de las dos estructuras se complete a tiempo es 0.5. Calcular la probabilidad de que

   (a) Ninguna de las estructuras se completen a tiempo.

   (b) Ambas estructuras se completen a tiempo.

8. Se arrojan dos dados. Cual es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea un 5 si la suma de ambos es menor o igual a 8. Y si la suma es menor o igual a 4?

9. Un solo jugador juega al poker con un mazo de 52 cartas. En una primera mano recibe cinco cartas y luego puede realizar un único cambio de a lo sumo dos de sus cartas por otras del mazo.

(a) Cuál es la probabilidad de que reciba color (o sea, las cinco cartas del mismo palo) en la primera mano?

(b) Cuál es la probabilidad de obtener color luego del cambio, dado que en la primera mano recibío exactamente cuatro cartas del mismo palo?

(c) Cuál es la probabilidad de obtener color luego del cambio, dado que en la primera mano recibío exactamente tres cartas del mismo palo?

(d) Cuál es la probabilidad de obtener color?

10. La construcción de otro edificio en el plazo programado está relacionada con los siguientes acontecimientos:

    E = "la excavación se completa a tiempo"
    C = "los cimientos se completan a tiempo"
    S = "la estructura exterior se completa a tiempo"

    que pueden suponerse independientes y con probabilidades iguales a 0.8, 0.7 y 0.9 respectivamente. Calcular la probabilidad de:

    a) que el edificio sea terminado en el plazo programado, debido al cumplimiento de los plazos en las tres actividades referidas.

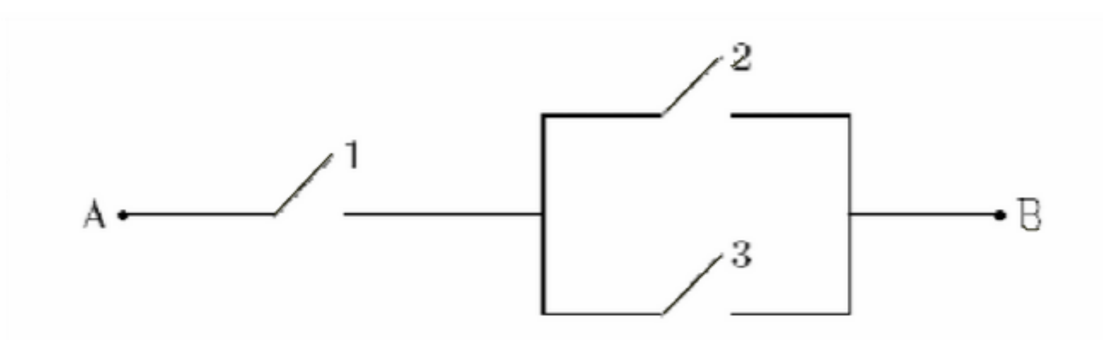
    b) que la excavación se complete a tiempo y no se completen a tiempo al menos una de las otras dos actividades.

11. Considere un sistema de componentes conectadas como lo indica la figura, Los puntos A y B estan conectados si y solo si el componente 1 funciona. Los componentes 2 y 3 estan conectados en parelelo, de manera que los puntos B y C estan conectados si y solo si al menos uno de ellos funciona. Designemos por F_i el evento "el componente i funciona "(i= 1,2,3). Supongamos que F_1 y F_2 son independientes, con probabilidades iguales a 2/3 y que F_3 tiene una probabilidad condicional de 1/8 cuando los componentes 1 y 2 funcionan y una probabilidad de 1/10 cuando solamente el componente 1 funciona y el 2 no.

    (a) Probar que F_1 y F_2^c son independientes.

    (b) Calcular la probabilidad de que el sistema funcione, es decir, que los puntos A y C esten conectados.

    (c) Calcular la probabilidad de que el componente 2 funcione dado que los puntos A y C estan conectados.



12. (a) Repensar el ejercicio 6 , pero asumiendo que en cada nacimiento, la probabilidad de que nazca un varón es p que no necesariamente vale 1/2.
    (b) Sea $Y =$ número de hijos varones. Hallar la función probabilidad puntual de Y y su función de distribución acumulada.

13. Se sabe que el 10% de los pacientes que presentan ciertos síntomas tienen una determinada enfermedad. El diagnóstico final de la misma depende de un análisis de sangre. Si embargo, como los análisis individuales son caros, el hemátologo espera hastta que N pacientes que presentan los síntomas lo visiten. Entonces mezcla la sangre de los N pacientes y le hace el análisis. Si ninguna de las N personas esta enferma, entonces el análisis de la muestra es negativo. Sin embargo, si uno de los pacientes esta enfermo, entonces el análisis dará positivo y el hemátologo deberá hacer análisis individuales para determinar cuál de los pacientes está enfermo.
    (a) Encontrar la probabilidad de que el análisis sobre la sangre mezclada de negativo.
    (b) Si $X =$ número de análisis que debe hacer el hematólogo sobre los N pacientes, determinar la función de probabilidad puntual de X.
    (c) Hallar $E(X)$

14. La cantidad X de huevos que pone una pájara tiene la siguiente función de probabilidad puntual

k	0	1	2
$p_X(k)$	0.3	0.5	0.2

    Si la probabilidad de que un huevo se desarrolle es $p = 0.6$ y suponemos que hay indepepndencia entre los desarrollos de los distintos huevos,
    (a) Calcular la probabilidad de que no se desarrolle ninguno
    (b) Hallar la función de probabilidad puntual y la función de distribución acumulada de la variable $Y =$ número de huevos que se desarrollan.

15. Se disponen de dos urnas, rotuladas A y B. La primera contiene 5 bolitas blancas y 6 rojas, y la otra tiene 1 bolita roja y 10 blancas. Se saca una bolita de la primera urna, se la coloca en la urna B, se las mezcla y se extra otra de la segunda urna. Sea la variable aleatoria $X =$ cantidad de bolitas rojas extraídas.
    (a) Calcular la función de probabilidad puntual de X y su función de distribución acumulada.
    (b) Es más probable sacar dos bolitas rojas o dos blancas?
    (c) Hallar $E(X)$
    (d) Sea Y el número de bolitas blancas extraídas. Hallar la esperanza de Y

16. Se ha comprobado que la duración X de ciertos componentes electrónicos tiene la siguiente función de probabilidad puntual

$$p_X(k) = 0.8^k 0.2 \qquad k \in I\!N$$

    La empresa fabricante da la siguiente garantía:

- $\star$ devolución total del importe si el componente dura 4 meses o menos
- $\star$ devolución del 50% del importe si dura entre 5 y 12 meses
- $\star$ 0% de devolución si el elemento dura 12 meses o más

Si un componente electrico cuesta 100 pesos, hallar la función del probabilidad puntual de la variable aleatoria Y =devolución por garantía. Hallar su valor esperado de dos formas distintas.

17. Felipe quiere encender un cigarrillo y tiene un encendedor que el 70% de las veces falla.
    (a) Cuál es la probabilidad de que le lo pueda prender en el quinto intento?
    (b) Cuál es la probabilidad de que deba intentar 5 veces o mas?

18. Cansado de su encendedor pide prestada una cajita de fósforos que contiene 15 fósforos de los cuales 5 ya fueron usados. Desesperado toma 4 fósforos de la cajita. Cuál es la probabilidad de que con esos 4 fósforos pueda encender sus cigarrillo?

19. (a) Si la cajita de fósforos tuviera 1500 fósforos de los cuales 500 están usados. Cuál es la probabilidad de que los 4 fósforos que eligió estén usados?
    (b) Calcular la misma probabilidad que en a) pero suponiendo que los fósforos se eligen con reposición.

20. Si fuma 8 cigarrillos por día y todos los prende con encendedor. Cuál es la probabilidad de que en tres de esos cigarrillos tenga que intentar prenderlos 5 veces o más?

21. Finalmente, Felipe decidió que al tercer cigarrillo que tenga que intentar prenderlo 5 veces o mas tira el encendedor y compra uno nuevo.
    (a) Cuál es la probabilidad de que tenga que comprar uno nuevo encendedor antes de terminar su primer paquete?
    (b) Cuántos cigarrillos espera fumar antes de comprar un nuevo encendedor?

22. Una caja A contiene 9 cartas numeradas del 1 al 9 y otra caja B contiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Se escoje una caja al azar y se saca una carta. Si tiene númeto par se saca (sin reposición) otra carta de la misma caja, pero si tiene número impar se saca una carta de la otra caja (sin reposición).
    (a) Calcular la probabilidad de que ambas cartas muestren número par.
    (b) Si ambas cartas son números pares. Cuál es la probabilidad de que vengan de la caja A?
    (c) Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea impar?

23. (a) Hallar la $E(X)$ para el problema 15.
    (b) Sea Y el número de bolitas blancas extraídas. Hallar la esperanza de Y

24. Hallar la esperanza para el problema 13.

25. Se ha comprobado que la duración X de ciertos componentes electrónicos tiene la siguiente función de probabilidad puntual

$$p_X(k) = 0.8^k 0.2 \qquad k \in I\!N$$

La empresa fabricante da la siguiente garantía:

- ⋆ devolución total del importe si el componente dura 4 meses o menos
- ⋆ devolución del 50% del importe si dura entre 5 y 12 meses
- ⋆ 0% de devolución si el elemento dura 12 meses o más

Si un componente electrico cuesta 100 pesos, hallar la función del probabilidad puntual de la variable aleatoria Y =devolución por garantía. Hallar su valor esperado de dos formas distintas.

26. Felipe quiere encender un cigarrillo y tiene un encendedor que el 70% de las veces falla.
    (a) Cuál es la probabilidad de que le lo pueda prender en el quinto intento?
    (b) Cuál es la probabilidad de que deba intentar 5 veces o mas?
27. Cansado de su encendedor pide prestada una cajita de fósforos que contiene 15 fósforos de los cuales 5 ya fueron usados. Desesperado toma 4 fósforos de la cajita. Cuál es la probabilidad de que con esos 4 fósforos pueda encender sus cigarrillo?
28. (a) Si la cajita de fósforos tuviera 1500 fósforos de los cuales 500 están usados. Cuál es la probabilidad de que los 4 fósforos que eligió estén usados?
    (b) Calcular la misma probabilidad que en a) pero suponiendo que los fósforos se eligen con reposición.
29. Si fuma 8 cigarrillos por día y todos los prende con encendedor. Cuál es la probabilidad de que en tres de esos cigarrillos tenga que intentar prenderlos 5 veces o más?
30. Finalmente, Felipe decidió que al tercer cigarrillo que tenga que intentar prenderlo 5 veces o mas tira el encendedor y compra uno nuevo.
    (a) Cuál es la probabilidad de que tenga que comprar uno nuevo encendedor antes de terminar su primer paquete?
    (b) Cuántos cigarrillos espera fumar antes de comprar un nuevo encendedor?
31. La administración de una universidad le asegura a un matemático que él tiene sólo una posibilidad en 10000 de encontrarse atrapado en un catastrófico ascensor en el edificio donde se encuentra el departamento de mátematicas. Si él va a trabajar 5 días a la semana, 52 semanas al año, durante 10 años y siempre toma el ascensor. Cuál es la probabilidad de que nunca quede encerrado en el ascensor al subir? Cuál es la probabilidad de que se quede encerrado una vez al subir? Dos veces?. Suponer que los resultados de cada día son mutuamente independientes.
32. El número de ciero tipo de bacterias en un estanque tiene una distribución Poisson de párametro $\lambda = 3$ bacterias por cm^3 de agua.
    (a) Calcule la probabilidad de que una muestra de 2 cm^3 contenga 4 o más bacterias.
    (b) Si ahora se toman en forma independiente 5 muestras de 2 cm^3 de volumen cada una. Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas contengas 4 o más bacterias?
33. Las llamadas telefónicas que se reciben en una cierta residencia siguen un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 2$ por hora.

(a) Si Felipe toma una ducha de 10 minutos. Cuál es la probabilidad de que el télefono suene durante ese tiempo?

(b) Cuán larga puede ser la ducha si el quiere que la probabilidad de no recibir llamadas sea como mínimo 0.5

34. Una empresa de medicina prepaga clasifica a sus afiliados en 2 categorías: riesgo bajo y riesgo elevado. Suponga que el número de llamadas al servicio de urgencia por año que tiene un afiliado de bajo riesgo sigue un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0.2$ mientras que el número de llamadas al servicio de urgencias que tiene un afiliado de riesgo elevado sigue un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0.5$ .Suponga que la empresa tiene clasificados en la categoría riesgo elevado al 30% de sus afiliados.

    (a) Cuál es la probabilidad de que un afiliado elegido al azar no haga ninguna llamada al servicio de urgencias en los próximos cuatro años?

    (b) Si se elige un afiliado que no hizo ninguna llamada al servicio de urgencias en los últimos 4 años, cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría de riesgo bajo?

    (c) se eligen 7 afiliados en forma independiente halle la probabilidad de que al menos 1 de los 7 no haga ninguna llamada al servicio de urgencias en los próximos cuatro años.

35. En un juego de tiro al blanco, la distancia al centro (en cm) que obtiene Felipe se considera una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \frac{x}{72} \quad I_{[0,12]}(x)$$

    (a) Hallar la probabilidad de que un tiro de Felipe diste menos de 1cm del blanco.

    (b) Hallar F_X, la función de distribución acumulada.

    (c) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.

    (d) Hallar el percentil o cuantil 0.90 de la distribución de X.

    (e) En un pub se organiza un juego que otorga un premio de $120 - 10X$ pesos para cada lanzamiento al blanco, donde X es la distancia al blanco conseguida. Si cada vez que desea participar de este juego se debe pagar 45 pesos. Cuál es la esperanza y la varianza de la ganancia neta para Felipe?

36. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a. donde X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1 - x) \quad I_{[0,1]}(x)$$

    (a) Determinar c. Hallar la $E(X)$.

    (b) Se elige un compuesto al azar. Hallar la probabilidad de que la fracción de alcohol en dicho compuesto esté entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

    (c) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido del alcohol: si $x < \frac{1}{3}$ el precio es 1\$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ el precio es 2\$ y si $x > \frac{2}{3}$ el precio es 3\$. Hallar la distribución del precio de venta del producto. Es una variable aleatoria discreta o continua? Hallar la esperanza del precio de venta del producto.

37. La medida en centímetros de la longitud de la cintura de los hombres en Buenos Aires sigue una distribución normal con media 75 y varianza 25. Se sabe que todos los hombres de menos de 70 cm usan cinturón talle 1, mientras que los de cintura entre 70 y 81 cm usan talle 2 y los restantes talle 3.

    (a) Qué proporción de hombres usa cintos de talle 2?

    (b) Cuál debería ser la longitud máxima de cintura del talle 1 si se quiere que el 30% de los hombres use talle1?

    (c) En una tienda un cliente acaba de comprar un cinturón de talle 2 para uso personal. Sabiendo esto, cuál es la probabilidad de que su cintura mida más de 75cm?

    (d) Si en una tienda entran azarosamente hombres a comprar de a un cinturón. Cuál es la probabilidad de que los primeros tres cinturones que se vendan sean del mismo talle?

38. Dos máquinas producen piezas de un mismo tipo en grandes cantidades, cuyos diámetros (en mm) tiene distribuición normal con igual valor esperado μ para todas las máquinas y varianza igual a 2 y 5 para las máquinas 1 y 2, respectivamente. Si el diámetro de una pieza difiere de su valor esperado en por lo menos 2 mm, la pieza está fuera de los límites de especificación. Además, se sabe que la máquina 1 produce la mitad del número de piezas que la máquina 2.

    (a) Calcule la probabilidad de que un pieza este fuera de los limites de especificación cuando es producida por la máquina 2.

    (b) Si una pieza seleccionada aleatoriamente está fuera de los limites de especificación, cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina 2?

    (c) Calcule la probabilidad de que sea necesario seleccionar más de 3 piezas para encontrar la primera pieza fuera de los limites de especificificación.

    (d) El dueño de la fábrica quiere actualizar el equipamiento, para esto busca comprar una única máquina para producir todas las piezas. La nueva máquina produce piezas con diámetros normalmente distribuídos centrados en μ pero con varianza σ^2. Cuán chico debe ser σ^2 para que al menos el 95 % de la piezas producidas por la nueva máquina estén dentro de los limites de especificación?.

    (e) Consideremos en adelante $\mu = 3$ y denotemos por X al diámetro de una pieza elegida al azar. Hallar $f_X(x)$, la función de densidad de X y $V(X)$ la varianza de X.

39. Un comerciante vende ejes en cajones de 250 unidades, 50 de los cuales son porducidas por una máquina y tienen longitud X y el resto son producidas por otra, y tienen longitud Y. Si X e Y son variables aleatorias continuas con funciones de densidad,

$$f_X(x) = 2(x-1) \quad I_{[1,2]}(x)$$

$$f_Y(y) = \exp^{-(y-1)} \quad I_{[1,+\infty]}(y)$$

    (a) Hallar la función de distribución de $Z =$ longitud de un eje elegido al azar de la caja.

    (b) Hallar la esperanza y varianza de Z.

40. El monto de transferencias (en miles de pesos) en efectivo realizadas por día en una sucursal bancaria es una variable aleatoria X que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{18}x \quad I_{(0,6)}(x)$$

(a) Si se sabe que el monto de transferencias en efectivo recibido por dicha sucursal en un día fue inferior a 5000, cuál es la probabilidad de que resulte superior a la esperanza del monto de transferencias?

(b) Calcule $E(\frac{1}{X})$ y $E(3X^2 - 1)$.

(c) Sea la variable aleatoria $Y = \frac{X^2}{3}$, halle $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$. A qué familia pertenece esta distribución?

41. La cantidad X de huevos que pone una pájara tiene la siguiente función de probabilidad puntual

k	0	1	2
$p_X(k)$	0.3	0.5	0.2

Si la probabilidad de que un huevo se desarrolle es $p = 0.6$ y suponemos que hay indepepndencia entre los desarrollos de los distintos huevos,

(a) Hallar la función de probabilidad conjunta del vector (X, Y).

(b) Hallar la función de probabilidad puntual y la función de distribución acumulada de la variable $Y =$ número de huevos que se desarrollan.

(c) Calcular la $P(X < 2|Y = 1)$.

42. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} \quad I_{[-1,1]}(x)I_{(x^2,+\infty)}(y)$$

(a) Hallar f_X y f_Y.

(b) Calcular $P(Y \leq 1|0 \leq X \leq 1)$.

(c) Hallar $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$ y $P(\frac{1}{10} \leq Y \leq 1|X = \frac{1}{3})$.

43. Para ser contratado en un empleo un aspirante tiene que realizar dos exámenes A y B independientes. La calificación de cada examen será insuficiente (0), suficiente (1) o bueno (2). Las probabilidades de obtener en cada examen 0,1 ó 2 se dan en la siguiente tabla:

	A	B
0	0.1	0.2
1	0.6	0.7
2	0.3	0.1

Sea $X =$ diferencia en módulo de las calificaciones obtenidas en los exámenes A y B e $Y =$ suma de las calificaciones obtenidas en los exámenes A y B.

(a) Hallar la función de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y).

(b) Hallar $P(Y < 2|X = 0)$

(c) Hallar $cov(X,Y)$

(d) Son X e Y independientes? Justifique su respuesta.

44. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} \quad I_{[-1,1]}(x)I_{(x^2,+\infty)}(y)$$

(a) Hallar f_X y f_Y.

(b) Calcular $P(Y \leq 1|0 \leq X \leq 1)$.

(c) Hallar $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$ y $P(\frac{1}{10} \leq Y \leq 1|X = \frac{1}{3})$.

45. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20%, de ojos verdes es 5%, de ojos negros es 10% , otro color de ojos es 65%. Josefina decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km. Para ello debe tomar 1 colectivos en los que viajan sólo salteños. Si en el colectivo viajan 10 hombres.

(a) Calcular la probabilidad de que en el colectivo haya 4 hombres con ojos azules, 1 con ojos verdes y 3 hombres con ojos negros.

(b) Calcular la probabilidad de que en el colectivo haya menos de 4 hombres con ojos azules.

(c) Calcular la probabilidad de que en el colectivo haya menos de 4 hombres con ojos azules o verdes.

(d) Si luego Josefina toma otro colectivo en el que viajan 8 salteños (ninguno de los anteriores se sube a este colectivo). Calcular la probabilidad de que en total en ambos viajes haya 5 hombres con ojos verdes.

46. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolas blancas estraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolas blancas estraídas es impar} \end{cases} \\ Y &= \text{número de bolas negras estraídas} \end{aligned}$$

(ejercicio 3 practica 5) Hallar $E(X+3Y)$ $E(XY)$, $cov(X,Y)$, $cov(X-Y,X)$, $V(X-Y)$ y $\rho(X,Y)$.

47. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = (2x + 2y - 4xy) \quad I_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(y)$$

(a) Calcular $cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

(b) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

48. María tiene tres hijos, sean

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Ana} \\ X_2 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Benjamín} \\ X_3 &= \text{tiempo (en horas) que duerme Celeste} \end{aligned}$$

Como canta muy lindo, ella logra que sus tres hijos se duerman al mismo tiempo. Cuando alguno se despierta, María se despierta. Asumiendo que ella se duerme 10 minutos despues que sus hijos y que las X_i son variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con $X_i \sim \varepsilon(\frac{1}{7})$

(a) Escribir a la variable $Y =$ tiempo (en horas) que duerme María, en función de las X_i.

(b) Hallar F_Y y f_Y

(c) Comparar $E(X_i)$ con $E(Y)$

(d) Generalizar el item b) en el caso de tener n variables $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.

49. Sean $X \sim \varepsilon(\lambda)$ y $Y \sim \varepsilon(\lambda)$ variables aleatorias independientes. Hallar la distribución de $W = X + Y$ de dos maneras distintas; planteando la función de distribución de W y usando función generadora de momentos.

50. La rana Anasstasia duerme todas las noches en un pozo de un metro de profuncidad. Cada mañana intenta saltar fuera del pozo. La altura enn metros de cada salto de la rana tiene distribución exponencial con parámetro 2 (las laturas de los distintos saltos son independientes). Si al tercer salto no logra salir, decide quedarse descansando en el pozo el resto del día.

(a) Hallar la función de probabilidad puntual de la varaible aleatoria $W =$ número de saltos en un día.

(b) Hallar la probabilidad de que en 80 días, Anastasia haya dado más de 210 saltos.

(c) Hallar la probabilidad de que en 80 días, Anastasia haya salido del pozo menos de 20 veces.

51. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de probabilidad puntual dada por

k	$p_X(k)$
0	$2\theta^2 - 3\theta + 4/3$
1	$-4\theta^2 + 4\theta - 2/3$
2	$2\theta^2 - \theta + 1/3$

para $1/4 < \theta < 3/4$ hallar un estimador de momentos de θ. Es insesgado?. Es consistente?

52. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad $U(-\theta, \theta)$ con $\theta > 0$

(a) Hallar el estimador de momentos de θ.

(b) Probar que el estimador hallado en a) es consistente.

53. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = 2\theta x e^{-\theta^2 x} I_{[0,+\infty)}(x) \qquad \theta > 0$$

(a) Hallar θ_n el EMV de θ

(b) Decidir si es insesgado.

(c) Decidir si es consistente.

(d) Hallar un estimador de θ^2

54. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \qquad \theta > 0$$

(a) Hallar θ_n el EMV de θ

(b) Decidir si es insesgado.

(c) Hallar el error cuadrático medio de θ_n.

(d) Decidir si es consistente.

55. Se supone que la longitud de cierto tipo de eje tiene distribución normal con desvío $\sigma = 0.05$ mm. Se toma una muestra de 20 ejes y se sabe que la longitud media es de 52.3 mm.

    (a) Hallar un intervalo de confianza para la longitud media de nivel 0.99.

    (b) Qué tamaño debera tener la muestra para que la longitud media del intervalo sea menor que $\frac{\sigma}{10}$

56. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \qquad \theta > 0$$

    (a) Verificar que $Y_i = -4 \log \frac{X_i}{\theta}$ tiene distribución $\varepsilon(1/2)$.

    (b) Hallar la distribución de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

    (c) Hallar un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ.

    (d) Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.90 para θ, si $\prod_{i=1}^n Y_i = 10$.

57. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \qquad \theta > 0$$

    (a) Hallar la distribución de $T = \max_{1 \le i \le n} \dfrac{X_i}{\theta}$.

    (b) Hallar un familia de intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ basado en T.

    (c) De los estimadores anteriores hallar el intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de menor longitud basado en T.

58. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad $\varepsilon(\lambda)$

    (a) Hallar dos intervalos de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ.

    (b) Idem para $\frac{1}{\lambda}$. Cuál de los dos intervalos propuestos conviene si se usa como criterio elegir al de menor longitud esperada?

59. Consideremos un procedimiento para medir el contenido de manganeso de un mineral. A este procedimiento se lo ha usado muchas veces y se sabe que las mediciones siguen un distribución normal cuya desviación estándar es 0.15. Se está estudiando si el método tiene error sistemático.

    (a) Se hacen 8 mediciones de un mineral preparado que tiene 7% de manganeso y se obtiene los siguientes resultados,

$$6.9 \quad 7.1 \quad 7.2 \quad 7.07 \quad 7.15 \quad 7.04 \quad 7.18 \quad 6.95$$

    Cuál es su conclusión si desea que la probabilidad de equivocarse al decidir que el método tiene error sistemático cuando en realidad no lo tiene sea 0.05? (En este caso si no hay error sistemático las determinaciones siguen un distribución $N(7, 0.15^2)$ y si hay error sistematico la distribución es $N(\mu, 0.15^2)$ con $\mu \neq 7$).

(b) Si el método tiene un error sistemático de 0.1 (o sea si $\mu = 7.1$). Cuál es la probabilidad de cometer error de tipo II?

(c) Se quiere aplicar un test estadístico de modo que al igual que en el inciso a) la probabilidad de decidir si hay un error sistemático cuando no lo hay sea 0.05. Pero además se desea que si hay error sistemático de 0.01, la probabilidad de detectarlo sea ≥ 0.8 (o lo que es equivalente, la probabilidad de error de tipo II sea ≤ 0.2). El test del inciso a) cumple con este requerimiento?. En caso contrario, cuantás determinaciones habría que hacer como mínimo?

60. La producción media anual de manzanas en una zona del valle de Río Negro es una variable aleatoria que se distribuye en forma normal con media 90.4 Tn/área. Se observó la producción media de 16 parcelas plantadas con manzanos elegidas al azar y tratadas con un nuevo fertilizante obteniendose una media de 94.3 y un desvío de 6.2 Tn/área.

    (a) Hacer un test de nivel 0.05 para decidir si el nuevo fertilizante produce un rendimiento medio mayor. Cuál es la conclusión del test?

    (b) Hallar el p-valor.

61. Una ruleta tiene números del 0 al 39. Un inspector de casinos sospecha que los números bajos ocurren con mayor frecuencia. Para corroborarlos tira en forma independiente 108 veces una bolilla y cuenta la candidad de resultados que caen entre 0 y 9.

    (a) De los 108 tiros se observan 40 resultados menores o iguales a 9. Plantear el test de hipótesis para verificar si es cierta la sospecha del inspector y decidir si hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula a nivel asintótico 0.06.

    (b) Cuál es la potencia del test hallado en a) cuando el valor verdadero de la proporción de veces que sale un número entre 0 y 9 es 0.36?

62. El número de personas que entran a un cibercafé entre las 19 y las 20 hs tiene distribución de Poisson. El dueño del local está evaluando la posibilidad de instalar una nueva terminal para que sea utilizada en ese horario, lo cual hará si la media de cibernautas en ese horario excede a 25. Para verificar si esto ocurre, durante 36 días cuenta la cantidad de personas que van a su negocio en dicho horario y ve que el promedio muestral es de 26 personas. Determinar una región de rechazo de nivel asintótico 0.05 para las hipótesis

$$H_0 : \lambda = 25 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \lambda > 25$$

    (a) hallar el p-valor para la muestra dada. Qué decisión se toma en base a los datos que obtuvo?

    (b) cuál es la probabilidad de que no se considere necesaria otra terminal si en realidad la media verdadera de usuarios es de 27 personas?

    (c) cuántos días debería observar lo que ocurre en su local para obtener que la probabilidad calculada en c) sea a lo sumo del 5%?