Polinomios positivos y sumas de cuadrados

1er cuatrimestre de 2017 - Lista de ejercicios

---

1. El polinomio de Choi-Lam es el polinomio

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 4xyz + 1 \in \mathbb{R}[x,y,z].$$

Probar que es no negativo en $\mathbb{R}^3$ pero no es una suma de cuadrados en $\mathbb{R}[x,y,z]$.

2. Para $a = (a_d, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$, sea $f_a(x) \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio $f_a(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$. Sea

$$\mathcal{C}_{1,d} = \{a \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f_a(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $b \in \mathcal{C}_{1,d} \setminus \{0\}$. Probar que b pertenece a un rayo extremo de $\mathcal{C}_{1,d}$ si y sólo si todas las raíces de f_b son reales.

3. (a) Probar que $\mathbb{R}(x) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0\}$ es un cuerpo real.
   (b) Sea $r \in \mathbb{R}$. Probar que $x - r$ y $r - x$ no son sumas de cuadrados en $\mathbb{R}(x)$.
   (c) Hallar todos los órdenes posibles para $\mathbb{R}(x)$.

4. Para cada $b \in \mathbb{R}$, hallar la cantidad de raíces reales en el intervalo $(0, 1)$ del polinomio $f(x) = x^4 + bx + 1$, contadas sin multiplicidad.

5. Sean $f, g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x]$ con $f \neq 0$. En cada uno de los siguientes casos, hallar la cantidad de elementos en el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ g_1(x)\varepsilon_1 0,\ g_2(x)\varepsilon_2 0\}$$

para cada $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{<, =, >\}^2$:

   (a) $\mathrm{TQ}(f, 1) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1) = -2$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_2) = 3$, $\mathrm{TQ}(f, g_1g_2) = 0$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2g_2) = 2$, $\mathrm{TQ}(f, g_2^2) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1g_2^2) = -2$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2g_2^2) = 4$.
   (b) $\mathrm{TQ}(f, 1) = 6$, $\mathrm{TQ}(f, g_1) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_2) = -1$, $\mathrm{TQ}(f, g_1g_2) = 0$, $\mathrm{TQ}(f, g_2^2) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1g_2^2) = 4$.

6. Sean $f_1, \ldots, f_{m_1}, g_1, \ldots, g_{m_2}, h_1, \ldots, h_{m_3}, p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$, $\mathcal{M}$ el monoide multiplicativo generado por $f_1, \ldots, f_{m_1}$, $\mathcal{C}$ el cono generado por $g_1, \ldots, g_{m_2}$ e $\mathcal{I}$ el ideal generado por $h_1, \ldots, h_{m_3}$. Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{M}^2$, $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$, $Z_1, Z_2 \in \mathcal{I}$, $e \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ tales que

$$S_1p^{2e} + N_1 + Z_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad S_2 + N_2 + Z_2 + qp = 0.$$

   (a) Probar que existen $S \in \mathcal{M}^2$, $N \in \mathcal{C}$ y $Z \in \mathcal{I}$ tales que

$$S + N + Z = 0.$$

   (b) Hallar tales S, N y Z en función de $S_1, S_2, N_1, N_2, Z_1, Z_2, e$ y q.

7. Decidir si los ideales $I_1 = \langle x^2 + y^2 \rangle$ e $I_2 = \langle x^3 + y^2 \rangle$ de $\mathbb{R}[x,y]$ son ideales reales.

8. (a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen polinomios $p_n,\ q_n \in \mathbb{R}[x]$ que son sumas de cuadrados en $\mathbb{R}[x]$ y tales que

$$1 + \frac{1}{n} - x^2 = p_n + q_n(1-x^2)^3.$$

(b) Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[x]$ sucesiones formadas por sumas de cuadrados en $\mathbb{R}[x]$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad del item anterior. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{grado}(p_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{grado}(q_n) = \infty.$$

9. (a) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{C}^\infty$. Para $k \in \mathbb{N}_0$, probar que

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i\Big)^{(k)} = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ k_1+\cdots+k_n=k}} \frac{k!}{k_1!\ldots k_n!} \prod_{i=1}^{n} f_i^{(k_i)},$$

donde el superíndice entre paréntesis indica orden de derivación.

(b) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}_0$, se define

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}$$

(notar que si $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{1/n}$, entonces para $k \in \mathbb{N}_0$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{1/n}{k}$). Para $n \in \mathbb{N}$, probar que

$$r(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{1/n}{k} x^{\frac{nk+1}{n}} \in \mathbb{R}\langle\langle x\rangle\rangle$$

es una raíz de $p(x,y) = y^n - x - x^2 \in \mathbb{R}\langle\langle x\rangle\rangle[y]$.

10. Sea $n \geq 1$ y

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^i \in \mathbb{R}[x,y] \subset \mathbb{R}\langle\langle x\rangle\rangle[y]$$

un polinomio tal que $a_0(x) \neq 0$ y $a_n(x) = 1$. Sea $r(x) \in \mathbb{R}\langle\langle x\rangle\rangle$ una raíz de p. Probar que $r(x) \neq 0$ y $\operatorname{ord}(r) \geq 0$.

11. Sean $n, d \in \mathbb{N}$.

(a) Sean $s = \binom{n+d}{d}$, $t = \binom{n+2d}{2d}$ y sea $x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_t}$ una enumeración de los monomios de grado menor o igual a $2d$ en n variables de manera que en los primeros s términos se encuentran los monomios de grado menor o igual a d. Sean $f_1, \ldots, f_k, f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ con

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}x^{\alpha_j} \text{ para } 1 \leq i \leq k \qquad \text{y} \qquad f = \sum_{j=1}^{t} a_j x^{\alpha_j}.$$

Si

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times s} \qquad \text{y} \qquad B = A^{\mathrm{t}}A \in \mathbb{R}^{s\times s},$$

probar que $f = \sum_{1\leq i\leq k} f_i^2$ si y sólo si para $1 \leq j \leq t$

$$a_t = \sum_{\substack{1\leq j_1,j_2\leq s \\ \alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}=\alpha_j}} B_{j_1 j_2}.$$

(b) Sea $f \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^2$ de grado $2d$. Probar que $\ell(f) \leq \binom{n+d}{d}$.