

1	2	3	4

CALIF.

Optimización

Parcial - 01/07/2016

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

Justifique apropiadamente todas sus respuestas.

* Colocar nombre, apellido y D.N.I en cada hoja entregada.

■ Ejercicio 1

Consideremos el método tipo gradiente dado por

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f_k(x^k),$$

donde $f_0, f_1, \dots$ son funciones cuadráticas, digamos que $f_k(x) = (1/2)x^T Q_k x$ con Q_k simétrica, definida positiva, donde los autovalores de Q_k yacen en un intervalo $[\gamma, \Gamma]$, con $\gamma > 0$ para todo k .

Supongamos que para cierto $\epsilon > 0$ fijo, existe un x^* tal que

$$\|\nabla f_k(x^*)\| \leq \epsilon, \text{ para todo } k.$$

Sea α tal que $0 < \alpha < 2/(\gamma + \Gamma)$.

1. Mostrar que para todo k ,

$$x^{k+1} - x^* = (I - \alpha Q_k)(x^k - x^*) - \alpha \nabla f_k(x^*).$$

2. Usando el item anterior, probar que si $\|x^k - x^*\| \leq (2\epsilon)/\gamma$ entonces $\|x^{k+1} - x^*\| \leq (2\epsilon)/\gamma$, mientras que si $\|x^k - x^*\| > (2\epsilon)/\gamma$ entonces $\|x^{k+1} - x^*\| < (1 - (\alpha\gamma)/2)\|x^k - x^*\|$.
3. Concluir que se tiene que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| \leq \frac{2\epsilon}{\gamma}.$$

■ Ejercicio 2

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y estrictamente creciente. Sea $g(x) = \phi(f(x))$. Notar que los problemas de hallar el mínimo de f y el de g son equivalentes. Supongamos que f , ϕ y g son suaves.

1. Escribir las iteraciones del método de descenso más rápido con paso fijo de f y de g . ¿En qué caso coinciden?
2. Escribir las iteraciones del método de Newton de f y de g . ¿En qué caso coinciden?

Sugerencia: Usar que si M es una matriz de $n \times n$ invertible y a es un vector de n coordenadas

$$(M + aa^T)^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + a^T M^{-1} a} M^{-1} aa^T M^{-1}$$

siempre que $1 + a^T M^{-1} a \neq 0$.

■ Ejercicio 3

1. Resolver utilizando las condiciones KKT el siguiente problema de maximización con restricciones:

$$\begin{cases} \text{máx} & -(x-2)^2 - 2(y-1)^2 \\ & x + 4y \leq 0 \\ & x \geq y \end{cases}$$

Hacer un gráfico aproximado que represente el planteo, graficando la región de factibilidad y las curvas de nivel de la función objetivo.

2. Mostrar que el punto $x^* = (0, 0)$ satisface las condiciones KKT de primer orden del problema

$$\begin{cases} \text{mín} & -x + y \\ & \sin(x) - y \leq 0 \\ & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

¿Satisface las condiciones suficientes de segundo orden?

■ Ejercicio 4

Sea x^* una solución factible del problema

$$\begin{cases} \text{mín}_x & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ & Ax \geq b \end{cases}$$

donde $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica con k autovalores negativos. Llamemos $a_1, \dots, a_m$ a las filas de A .

Asumamos que p de las restricciones lineales están activas en el punto x^* y que las restricciones activas son l.i. Supongamos además que $p < k$.

Notar que como Q es simétrica, $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T$ donde λ_i son los autovalores de Q y $\{u_1, \dots, u_n\}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.

1. Mostrar que existe un $d \neq 0$ tal que:
 - $u_i^T d = 0$ para todo i tal que $\lambda_i \geq 0$,
 - $a_i^T d = 0$ para todo i tal que la restricción asociada a a_i está activa.
2. Concluir que x^* no satisface las condiciones KKT necesarias de segundo orden.