Apellido y Nombre:
No.de libreta:

Optimización

Examen 30/05/14

1. Considerar el problema, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \text{mín } 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y \\ x^2 + y^2 \leq 5 \\ -3x - y + 6 \geq 0 \end{cases}$$

a) Cuáles son las condiciones necesarias que debería cumplir un minimizador (x^*, y^*) del problema.

b) Encontrar el mínimo global del problema a partir de a). Tener en cuenta las distintas posibilidades de reestricciones activas.

c) Proponer las siguientes funciones de Penalidad y describir sus *pros* y sus *contras*.

i) Cuadrática.

ii) Exacta.

d) Plantear un algoritmo iterativo usando funciones de penalidad que dependan de la iteración. Explicarlo.

2. Calibracion del MonteCarlo Pesado

Dada una función $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexa, se quiere hallar la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{mín}_p \sum_{i=1}^N \Psi(p_i) \\ Gp = C \end{cases}$$

con $G \in \mathbb{R}^{M\times N}$y $C \in \mathbb{R}^M$ fijos. Se supone $M << N$ (por ejemplo $N = 10000$, $M = 50$).

a) Mostrar que si $\Psi^*(p)$ es una función convexa y $g(p, \lambda)$ es una función lineal en p y lineal en λ ($g_\lambda = A(p)\, g_p = B(\lambda)$), entonces:

$$\min_{p,\lambda}\{\Psi^*(p) + g(p, \lambda)\} = \min_{\lambda}\{\min_{p}\{\Psi^*(p) + g(p, \lambda)\}\}$$

b) *Se asume*, siguiendo el item anterior y usando multiplicadores de Lagrange, que el problema original puede resolverse buscando el siguiente mínimo:

$$\min_{p,\lambda}\left\{\sum_{i=1}^N \Psi(p_i) + \sum_{j=1}^M \lambda_j \left[\sum_{i=1}^N G_{ij} p_i - C_j\right]\right\}$$

Despejar cada p_i en función de los λ_j suponiendo que Ψ es una función de clase C^1 con derivada inversible.

c) Calcular explicitamente los p_i en función de los λ_j cuando:

i) $\Psi(x) = x \log(x)$, [Entropía].

ii) $\Psi(x) = \left(x - \frac{1}{N}\right)^2$, [Error cuadrático medio]

d) Para alguna elección de Ψ del item anterior, plantear el problema de minimización que resulta y compararlo con el problema original. Que beneficio trajo el análisis?

3. **Búsqueda Compacta**

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^2, *estríctamente* convexa con un único mínimo x^* y tal que $f(x) \to +\infty$ cuando $||x|| \to +\infty$.

a) Probar que, fijado un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) < f(x_0)\}$$

es acotado.

b) Sea $\mathcal{D} = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \ldots, e_n, -e_n\}$. Probar que para todo $x \neq x^*$ existe $d \in \mathcal{D}$ dirección de descenso en x. (Es decir, existe $d \in \mathcal{D}$ y $t_0 > 0$ tal que $f(x + td) < f(x)$ $\forall\, t \in (0, t_0)$).

c) Consideramos, para $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, la función punto a conjunto

$$A(x, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \alpha d,\, d \in \mathcal{D}\}$$

Probar que A es cerrada en (x, α) si $\alpha \neq 0$.

d) Estudiamos el algoritmo de Búsqueda Compacta, dado por:

i. Tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 > 0$, $k = 0$.
ii. Si existe $y \in A(x_k, \alpha_k)$ tal que $f(y) < f(x)$: Poner $x_{k+1} = y$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $k = k + 1$.
Si no: Poner $\alpha_k = \frac{\alpha_k}{2}$
iii. Ir a *ii*.

Probar que si f tiene un único mínimo x^*, entonces $x_k \to x^*$ $(k \to \infty)$.

4. **Minimización iterativa**

Sea $A : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un algoritmo tal que que dada una función continua f que alcanza un sólo mínimo en $\mathbb{R}$ y un punto inicial t_0, genera $z = A(f(t), t_0)$, el mínimo de f. En otras palabras, A es un algoritmo que minimiza funciones de una variable.

Dado $X = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, se notará de aquí en adelante $(t, \tilde{X}_l) = (x_1, \cdots, x_{l-1}, t, x_{l+1}, \cdots, x_p)$.

Dada $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función C^1 con un único punto mínimo X^* y dado $Z^0 \in \mathbb{R}^p$. Se considera el procedimiento:

$$\begin{array}{rcc}
X^0 & = & Z^0 \\
X^1 & = & \left(A\left(g(t, \tilde{X}_1^0), x_1^0\right), \tilde{X}_1^0\right) \\
 & \vdots & \\
X^p & = & \left(A\left(g(t, \tilde{X}_p^{p-1}), x_p^{p-1}\right), \tilde{X}_p^{p-1}\right) \\
X^{p+1} & = & \left(A\left(g(t, \tilde{X}_1^p), x_1^p\right), \tilde{X}_1^p\right) \\
 & \vdots & \\
X^n & = & \left(A\left(g(t, \tilde{X}_l^{n-1}), x_l^{n-1}\right), \tilde{X}_l^{n-1}\right)
\end{array}$$

En donde $n = r\,p + l$, $r \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq l < p$.

a) Implementar el pseudocodigo del algoritmo completo y explicar qué es lo que realiza.

b) Suponiendo que X^n está bien definida, probar que si $X^n \to Y$ entonces $Y = X^*$.
Ayuda: Dado j, ver que existe un $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\frac{\partial g}{\partial x_j}(X^{n_k}) \to 0$.

c) Hallar alguna condición para g para que X^n sea convergente.

d) Sea $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2$ y $Z_0 = (1, 1)$. Escribir los primeros pasos del algoritmo explícitamente.

*Los ejecicios en **negrita** valen doble; Los items son independientes entre si*