Vectores y matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$ vector columna

$X' = (x_{1,}x_2, \ldots, x_n)$ vector fila

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Propiedades:
1) $(A + B)' = A' + B'$
2) $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)' = \sum_{i=1}^{k} A_i'$
3) $(AB)' = B'A'$
4) $\left(\prod_{i=1}^{k} A_i'\right) = A_k' A_{k-1}' \ldots A_1'$

Matriz simétrica: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es simétrica si $A = A'$

Traza de una matriz cuadrada:

$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Propiedades:

1) $Tr(A) = Tr(A')$

2) $Tr\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Tr(A_i)$

3) $Tr(AB) = Tr(BA)$

4) $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$

5) $Tr(kA) = kTr(A)$ siendo k un escalar

Determinante de una matriz cuadrada de orden n

$\pi(n)$: una permutación del conjunto $(1,2,\ldots,n)$

π_i : el i-ésimo elemento de $\pi(n)$

$\#(\pi(n))$: el número de inversiones de la permutación $\pi(n)$

$\det(A) = \sum_{\pi(n)} (-1)^{\#(\pi(n))} \prod_{i=1}^{n} a_{\pi_i,i}$

Propiedades

1) $\det(A') = \det(A)$

2) $\det(diag(a_1,\ldots,a_n)) = \prod_{i=1}^{n} a_i$

3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

4) $\det(AA') \geq 0$

Inversa de una matriz cuadrada

Sea A una matriz cuadrada de orden n, si existe B tal que $AB = BA = I$, B se denomina inversa de A y se nota A^{-1}. En este caso A se dice no singular.

Propiedades

1) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, si las inversas existen

3) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

4) Si A es simétrica, A^{-1} también lo es

5) Si A es no singular, $\det(A) \neq 0$

Rango de una matriz: es el número de filas o de columnas linealmente independientes

Propiedades:

1) Si $A \in \mathbb{R}^{nxp}, rg(A) \leq \min(n,p)$

2) Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $rg(A) = n$, entonces existe A^{-1}
3) $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$
4) $rg(A) = rg(A') = rg(AA') = rg(A'A)$

Inversa generalizada:
una inversa generalizada de A (siendo A una matriz no necesariamente cuadrada) es una matriz A^- que satisface: $AA^-A = A$
Todas las matrices tienen al menos una inversa generalizada

Si A es no singular, $A^- = A^{-1}$
Si A es singular , A^- no es única
Ejemplo

Sea X una matriz de dimensión nxp, de rango $p \leq n$,
una inversa generalizada de X es
$X^- = (X'X)^{-1}X'$
ya que
$XX^-X = X(X'X)^{-1}X'X = X$

Inversa generalizada de Moore Penrose: dada una matriz A de nxp existe una única matriz M de pxn, tal que
a) $AMA = A$
b) $MAM = M$
c) AM es simétrica
d) MA es simétrica
Si A es cuadrada y no singular entonces $M = A^{-1}$.

MA es la matriz de proyección en el espacio fila de A.
AM es la matriz de proyección en el espacio columna de A
Sea X una matriz de dimensión nxp, de rango $p \leq n$, la inversa generalizada de Moore Penrose de X es $M = (X'X)^{-1}X'$

Producto interno o escalar de vectores
Sean x e y vectores en $\mathbb{R}^n$, $\quad < x,y >= x'y = y'x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Propiedades
1) $< x,y >=< y,x >$
2) $< ax,y >= a < x,y >$
3) $< x_1 + x_2,y >=< x_1,y > + < x_2,y >$

Se define la norma de x como $\|x\| = \sqrt{x'x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Desigualdad de Cauchy Schwarz: $< x,y >^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

La distancia entre dos vectores x e y se define como $\|x-y\|$

Vectores ortogonales

x e y son ortogonales si $< x,y >= 0$ y se escribe $x \perp y$

Teorema de Pitágoras

Sean $v_1, v_2, \ldots v_k$ vectores ortogonales dos a dos en Ω, $\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$

Proyección ortogonal de un vector en la dirección de otro:

Dado el vector y, se define el vector proyección de dicho vector sobre un vector x como $\hat{y} = proy(y/x)$ tal que:

1) $\hat{y} = bx$ para algún escalar b

2) $y - \hat{y} \perp x$ o equivalentemente $< \hat{y},x >=< y,x >$

Al buscar el valor del escalar b que satisface dichas condiciones

$$\hat{y} = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ \left[< y,x > / \|x\|^2\right] y & x \neq 0 \end{cases}$$

Propiedades

1) $\|y - \hat{y}\|^2 \leq \|y - ax\|^2$ cualquiera sea el escalar a

2) $proy(cy/x) = cproy(y/x)$

3) $proy(y/cx) = proy(y/x)$

Vector ortogonal a un subespacio

Un vector y es ortogonal a un subespacio V de Ω ,si es ortogonal a todos los vectores de V

Proyección de un vector sobre un subespacio

La proyección de un vector y en un subespacio V de Ω, es el vector $proy(y/V) = \hat{y}$ tal que $(y - \hat{y}) \perp V$,el vector $e = y - \hat{y}$ es el residuo de y relativo a V.

Propiedadades

1) Sean $v_1, v_2, \ldots v_k$ vectores que determinan una base ortogonal de V,

$$proy(y/V) = \sum_{i=1}^{n} proy(y/v_i)$$

2) Sea $w \in V, \|y-w\|^2 \geq \|y-\hat{y}\|^2$

Matriz ortogonal: una matriz cuadrada es ortogonal si $AA' = A'A = I$

Propiedades: sean A y B matrices ortogonales

1) AB es ortogonal
2) $|\det(A)| = 1$
3) Las filas de A son vectores ortonormales al igual que las columnas

Matriz idempotente: una matriz P es idempotente si $P^2 = P$

Matriz de proyección: es una matriz P idempotente y simétrica

Propiedades

1) Todas las matrices idempotentes excepto la identidad son singulares
2) Si P es idempotente $I-P$ también lo es
3) Si P es una matriz de proyección $rg(P) = Tr(P)$

Teorema

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ un sistema de generadores del subespacio V,
si $proy(y/V) = \hat{y} = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k$
se necesita que:
$< y, x_i > = < \hat{y}, x_i > \qquad \forall i : 1 \leq i \leq k,$
estas condiciones son conocidas como ecuaciones normales,
dichas condiciones en forma matricial se pueden expresar como
$(X'X)b = X'y$
siendo X la matriz $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, es decir la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema de generadores de V

Si $X'X$ es no singular (equivalentemente $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es una base de V) la proyección es única y $b = (X'X)^{-1}X'y$

$\hat{y} = Xb = X(X'X)^{-1}X'y = Py$ siendo $P = X(X'X)^{-1}X'$ la matriz de proyección que proyecta y sobre V.

Si $V^{\perp}$ es el complemento ortogonal de V , $I-P$ es la matriz de proyección de y sobre $V^{\perp}$

Autovalores y autovectores

Sea A una matriz cuadrada de orden n, λ un escalar, v un vector , si se satisface la condición $Av=\lambda v$, λ es un autovalor de A y v es el autovector asociado.

$Av=\lambda v$ es equivalente a $\det(A-\lambda I)=0$ (ecuación característica) que es un polinomio en λ de grado n.

Los autovalores son entonces las raíces de la ecuación característica.

Propiedades

1) $tr(A)$ es la suma de los autovalores y $\det(A)$ es el producto de los autovalores

2) Si λ es un autovalor de A, λ^k es un autovalor de A^k

3) Si A es no singular y λ es un autovalor de A, λ^{-1}es un autovalor de A^{-1}

4) Si λ es un autovalor de $A, c\lambda$ es un autovalor de cA

Teorema

Si $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ son autovalores distintos de la matriz A y $v_1,v_2,\ldots,v_k$ son autovectores asociados a $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ respectivamente, entonces $v_1,v_2,\ldots v_k$ son linealmente independientes.

Autovalores y autovectores de matrices simétricas

Propiedades

1) A tiene n autovalores $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ reales pero no necesariamente todos distintos

2) $rg(A)=$ número de autovalores no nulos

3) Si v_1 y v_2 son autovectores asociados a autovalores distintos, entonces son ortogonales

4) Si λ_i es raíz de multiplicidad r de la ecuación característica se pueden encontrar r autovectores ortogonales asociados con λ_i

5) Si los autovectores se eligen además de norma 1, se puede encontrar un conjunto de n autovectores ortonormales $u_1,u_2,\ldots,u_n$ correspondientes a los n autovalores $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, repitiendo un autovalor r veces si su multiplicidad es r, de modo que generen $\mathbb{R}^n$

Descomposición espectral

Si $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ entonces $AU = U\Lambda$ siendo además $U'U = I$ entonces $U'AU = \Lambda$ y

$A = U\Lambda U'$ que se conoce como la descomposición espectral de A

Propiedades

1) Si P es una matriz de proyección, P tiene rango r si y sólo si tiene r autovalores iguales a 1 y $n - r$ iguales a cero

2) Si P es una matriz de proyección,P^k tiene los mismos autovalores que P y por lo tanto el mismo rango

3) Si A es una matriz ortogonal y λ es un autovalor de A, entonces $1/\lambda$ también es autovalor de A

Formas cuadráticas

Sea A una matriz simétrica de orden n y X un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces $X'AX$ se denomina forma cuadrática.

La matriz A (o su correspondiente forma cuadrática) se dice semidefinida positiva si $X'AX \geq 0 \;\; \forall X$

La matriz A se dice definida positiva si $X'AX > 0 \;\; \forall X \neq 0$

Propiedades

1) Los autovalores de una matriz semidefinida positiva son todos no negativos

2) Los autovalores de una matriz definida positiva son todos positivos y por lo tanto A es no singular

3) A es semidefinida positiva de rango r si y sólo si existe una matriz de rango r tal que $A = RR'$

4) A es definida positiva si y sólo si existe una matriz R no singular tal que $A = RR'$

5) Si A es definida positiva, A^{-1} también lo es

6) Si A es definida positiva, $rg(CAC') = rg(A)$

7) Si X es una matriz de nxp de rango p, entonces $X'X$ es definida positiva