MODELO LINEAL: clase 3 de abril.

Ejercicio 1: Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ variables aleatorias independientes tales que $y_i \sim N\,(i\,\theta\,,\ i^2\sigma^2)$ para $1 \leq i \leq n$.

a) Hallar θ^* el estimador de mínimos cuadrados generalizados de θ, y demostrar que θ^* es un estimador insesgado de θ.

b) Hallar la varianza de θ^*.

c) Hallar θ^{**} el estimador de mínimos cuadrados de θ ignorando que el modelo es heteroscedástico, y demostrar que θ^{**} es un estimador insesgado de θ.

d) Hallar la varianza de θ^{**}.

e) Comparar las varianzas anteriores y hallar el estimador lineal insesgado de mínima varianza (entre los insesgados).

Ejercicio 2: Considerar un modelo lineal dado por

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_1 + \beta_3 + \varepsilon_2 \\ y_3 &= \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

tales que $E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ y $Cov(\varepsilon_i\,,\ \varepsilon_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

Se pide:

a) Indicar si la función lineal paramétrica $\psi = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ es estimable.

b) Idem para $\psi = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.

c) Hallar una expresión general para todas las funciones paramétricas lineales estimables.

d) Hallar el estimador lineal insesgado de mínima varianza (entre los insesgados) para todas las funciones lineales paramétricas estimables, indicando si es único. Resolver este ejercicio de dos formas.

e) Hallar la varianza (mínima) del estimador hallado en d).

Ejercicio 3: Consideremos un modelo lineal con los supuestos del Ejercicio 2. Supongamos que dicho modelo tiene la siguiente matriz de diseño:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una expresión general para todas las funciones paramétricas lineales estimables.