Modelo Lineal

Ejercicio 1 La cantidad de una cierta sustancia química generada en un proceso depende de la temperatura a la que se expone dicha sustancia y de un error de medición aleatorio con media cero. Mas aún, se sabe que si $Y_i =$ cantidad de sustancia química en el i-ésimo experimento y $T_i =$ temperatura en el í-ésimo experimento, entonces, se verifica el siguiente modelo:

$$Y_i = \begin{cases} \epsilon_i & T_i < 20 \\ \beta_1(T_i - 20) + \epsilon_i & 20 \leq T_i < 100 \\ \beta_1 80 + \beta_2(T_i - 100) + \epsilon_i & T_i > 100 \end{cases}$$

Supongamos que se obtuvieron los siguientes datos experimentales:

$T_1 = 40$, $Y_1 = 57$, $T_2 = 80$, $Y_2 = 176$, $T_3 = 120$, $Y_3 = 223$, $T_4 = 180$, $Y_4 = 161$, $T_5 = 240$, $Y_5 = 99$,

donde la temperatura se fijo a priori.

a) Reescribir el modelo en términos de modelo lineal y hallar los estimadores de mínimos cuadrados para los parámetros usando la computadora.

b) Halle la media y el desvío estándar muestral de cada una de las variables del modelo lineal obtenido en a) (columnas de la matriz de diseño *X* e *Y*).

c) Suponer que los errores son independientes con esperanza 0 y varianza σ^2. Calcular un estimador de la varianza de varias formas.

d) Calcular la matriz $X'X$ de varias formas.

e) Estimar la matriz de covarianza de los estimadores obtenidos de varias formas.

f) Predecir de alguna manera la cantidad de sustancias que se obtendría si el proceso se hiciera a $T = 89$.

Ejercicio 2: Supongamos que queremos comparar 2 rectas de regresión dadas por

$$Y = \alpha_i + \beta_i x + \epsilon \quad i = 1, 2,$$

siendo $E(\epsilon) = 0$ y $Var(\epsilon) = \sigma^2$. Para ello tomamos n pares (x_{1j}, y_{1j}) correspondientes a la recta 1 y n pares (x_{2j}, y_{2j}) correspondientes a la recta 2, de manera que

$$Y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_{ij} + \epsilon_{ij}$$

donde los $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

a) Encuentre una expresión matricial adecuada para plantear este problema. ¿Qué observa de particular en la estructura de la matriz de diseño?

b) Encuentre los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros. ¿Cómo influye la estructura de la matriz de diseño en la determinación de estos estimadores?

c) Se desea testear que las 2 rectas son paralelas. Exprese la hipótesis nula y alternativa para este problema y deduzca un test de nivel α para decidir entre H_0 y H_1.

Resolvamos hoy a) y b).