

## Práctica 5

### Integrales complejas y fórmulas de Cauchy

---

1. Calcular

a)  $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$                       b)  $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$  ( $\operatorname{Re}(z) > 0$ )    c)  $\int_1^2 \log(it) dt$

2. a) Sean  $\gamma, \sigma$  las poligonales de vértices  $\{1, i\}$  y  $\{1, 1+i, i\}$  respectivamente. Hallar una parametrización de  $\gamma$  y de  $\sigma$  y calcular  $\int_{\gamma} f$  y  $\int_{\sigma} f$ , donde  $f(z) = |z|^2$ .

b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

3. Calcular:  $\int_{\gamma} 3z dz$  y  $\int_{\gamma} 3|z| dz$ , para

- a)  $\gamma$ : segmento que une  $-1$  con  $1$ .  
 b)  $\gamma$ :  $|z| = 1$  de  $-1$  a  $1$ , recorrido en el sentido horario.  
 c)  $\gamma$ :  $|z| = 1$  de  $-1$  a  $1$ , recorrido en el sentido antihorario.  
 d)  $\gamma$ : poligonal de vértices  $-1, i, 1$ .

4. Calcular

- a)  $\int_C e^z dz$ , si  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , recorrida una vez en sentido horario.  
 b)  $\int_0^1 x dz$ , uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices:  $0, i, 1$ .  
 c)  $\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , recorriendo la curva una vez en sentido horario.

5. Sea  $\gamma$  el polígono cerrado de vértices:  $1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ .

Hallar  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ .

6. Sean  $D \subset \mathbb{C}$  abierto,  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  diferenciable a trozos y  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Se define:

$$\int_{\gamma} f |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

a) ¿Qué se obtiene cuando  $f \equiv 1$ ?

- b) Calcular  $\int_{\gamma} |dz|$  para  $\gamma : |z - a| = r$ .
- c) Probar que  $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|$  y deducir que si  $|f(z)| \leq M$  y  $\ell = \text{long}(\gamma)$ , entonces  $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M\ell$ .

7. Calcular

a)  $\int_{\gamma} x dz$ ,  $\gamma$  : segmento de 0 a  $1 + i$

b)  $\int_{|z|=1} |z - 1| |dz|$

c)  $\int_{C_i} z^n dz$  ( $a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}$ )

$$C_1 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq \pi; \quad C_2 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

d)  $\int_{C_i} \frac{dz}{z - 2}$   $C_1 : |z - 2| = 4; \quad C_2 : |z - 1| = 5$

e)  $\int_{\gamma} (x^2 + iy^2) |dz|$   $\gamma : |z| = 2$

f)  $\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2 dz$

8. Hallar  $\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}} dz$ , donde:

- a)  $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0$ , de 1 a  $-1$ .
- b)  $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \leq 0$ , de 1 a  $-1$ .

9. Sea  $\gamma(t) = 1 + e^{it}$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Hallar

a)  $\int_{\gamma} (z^2 - 1)^{-1} dz$ .

b) Idem para  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ .

10. Sea  $f$  holomorfa en un abierto conexo  $\Omega$  tal que  $|f(z) - 1| < 1$  en  $\Omega$ . Mostrar que  $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$  para cualquier curva cerrada  $\gamma$  contenida en  $\Omega$ .

**Nota:**  $f'$  es continua.



