

## Práctica 2

### Nociones topológicas en análisis complejo

---

1. a) Sea  $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ , probar que

$$z_n \rightarrow z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

- b) Pruebe que:  $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|$ . ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca? Puede volver a pensar este inciso luego de realizar el ejercicio 8.

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $ni^n$	b) $n \left( \frac{1+i}{2} \right)^n$	c) $\left( \frac{(-1)^n + i}{2} \right)^n$
d) $\cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$	e) $\frac{n+1}{n} + i \left( \frac{n+1}{n} \right)^n$	f) $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$
g) $\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$	h) $\left( \frac{1+i}{2} \right)^n$	

3. Para cada  $w \in \mathbb{C}$  fijo, estudiar:

- (a) la convergencia de la sucesión  $z_n = w^n$ . En el caso en que  $|w| = 1$  y  $w^k = 1$  (raíz  $k$ -ésima de la unidad), además deduzca como se relacionan las distintas subsucesiones constantes de  $(z_n)$  con las demás soluciones de  $z^k = 1$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + w + w^2 + \dots + w^n)$ , para  $|w| < 1$ .

4. Probar

- a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{L}$
- b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

5. Calcular

a) $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z + 2i}$	b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$
c) $\lim_{z \rightarrow -i} z \cdot \bar{z}$	d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$
e) $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ con $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$	f) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3iz + 2 + i}{z^4 + iz^2 - (3 + 4i)z + 6}$

6. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

a)  $z, \bar{z}, \operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$  en  $\mathbb{C}$ .

b)  $\frac{1}{z}$  en  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

7. Hallar los puntos de discontinuidad de:

a)  $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$

b)  $f(z) = \frac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + 1}$   
( $z = x + iy$ )

8. Sea  $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \rightarrow (-\pi, \pi]$  definida por :  $\varphi(z)$  es el único número de  $(-\pi, \pi]$  tal que  $z = |z| e^{i\varphi(z)}$ . ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

**Nota:** dado  $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ , al número  $\varphi(z)$  se lo llama **argumento principal de  $z$**  y se lo nota:  $\varphi(z) = \operatorname{Arg}(z)$ .

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en  $z = 0$  de modo tal que resulten continuas en  $\mathbb{C}$ ?

a)  $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$

b)  $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

c)  $\frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{|z|}$

d)  $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

e)  $\frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|}$

10. **Exponencial:** Se define la función exponencial como:  $e^z = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$ .

a) Analizar su continuidad.

b) Probar que  $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$  para todo  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

c) Calcular:  $|e^z|$ ,  $\operatorname{Arg} e^z$ ,  $\operatorname{Re}(e^z)$ ,  $\operatorname{Im}(e^z)$ ,  $\bar{e^z}$

d) Probar que  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  y calcular  $1/e^z$ .

f) Mostrar que  $e^z$  tiene período  $2\pi i$ .

g) Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $e^z = \pm 1$ .

11. **Logaritmo**

a) Dado  $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ , hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $e^z = w$ .

b) Sea  $A \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo, y sean  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$

para todo  $z \in A$ . Probar que existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $g(z) = f(z) + 2k\pi i$  para todo  $z \in A$ . Tales funciones continuas son denominadas ramas del logaritmo en el conjunto  $A$ .

c) Sea  $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

i) Observar que  $A$  es abierto y conexo, y que para cada  $z \in A$ ,  $z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$ .

ii) Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$ . Probar que es una rama del logaritmo.

iii) Escribir todas las ramas del logaritmo en  $A$  en función de la dada en ii).

iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto  $A$  por  $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0}/r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$  donde  $0 < \theta_0 \leq 2\pi$ ?

d) Sean  $\varphi, \psi$  dos ramas del logaritmo. ¿Es cierto que  $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$  para todo  $z$ ?

e) Calcular:  $\ln i, \ln 1, \ln(1+i), e^{\ln i}$ .