MATEMATICA 2 - Clase Práctica del 6/4/17

Suma e intersección de subespacios - Suma directa - Coordenadas

Nota. *El objetivo de este apunte es que les sirva de guía para poder resolver los últimos ejercicios de la Práctica 2.*

Intersección de subespacios

Sea V un K-espacio vectorial y sean S y T subespacios de V. Veamos que

$$\boxed{S \cap T = \{v \in V : v \in S \text{ y } v \in T\}}$$

es un subespacio de V:

- $0 \in S$, $0 \in T$, entonces $0 \in S \cap T$.
- Sean $v, w \in S \cap T$, entonces $v + w \in S \cap T$ porque $v + w \in S$ por ser S subespacio, y $v + w \in T$ por ser T subespacio.
- Sean $v \in S \cap T$ y $k \in K$, entonces $kv \in S \cap T$ porque $kv \in S$ por ser S subespacio y $kv \in T$ por ser T subespacio.

Suma de subespacios

Vimos recién que la intersección de dos subespacios S y T es nuevamente un subespacio, pero la unión no lo es en general (Ejercicio 3, Práctica 2). Esto sucede porque puede haber un vector $v \in S$ y un vector $w \in T$ tales que $v + w \notin S \cup T$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, si $S = \langle(1, 0)\rangle$ y $T = \langle(0, 1)\rangle$ entonces $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S \cup T$. Por lo tanto, en general tenemos que agregar más vectores a $S \cup T$ para asegurarnos que, cada vez que sumamos vectores, esta suma esté en el conjunto. La *suma* $S + T$ es un espacio vectorial que se construye entonces agregando las sumas "que faltan" (y **solo** las sumas que faltan) para que este conjunto sea un subespacio. Se define entonces

$$\boxed{S + T = \{v + w : v \in S,\, w \in T\}.}$$

Como solo agregamos las sumas necesarias para construir un subespacio a partir de $S \cup T$ se puede ver que $S + T$ es el "menor" espacio vectorial que contiene a $S \cup T$. La forma más sencilla de construir $S + T$ es a partir de un sistema de generadores de cada uno de los subespacios: si $S = \langle v_1, \dots, v_n, \dots\rangle$ y $T = \langle w_1, \dots, w_m \dots\rangle$ entonces $S + T = \langle v_1, w_1, v_2, w_2, \dots\rangle$; o sea, un sistema de generadores de $S + T$ se obtiene directamente de juntar los generadores de S y los de T. Es importante notar que aún si tenemos una base de S y una de T, la unión de las bases **no necesariamente** es una base de $S + T$ (solo podemos asegurar que es un sistema de generadores).

Dados S, T subespacios de un K-espacio vectorial V vale que

$$S \cap T \subseteq S, T \subseteq S + T \subseteq V.$$

Suma directa

Sea V un K-espacio vectorial, y sean S, T subespacios de V. Si vale que $V = S + T$ y $S \cap T = \{0\}$, se dice que V es la *suma directa* de S y T y se nota $V = S \oplus T$.

Por definición de suma de subespacios, sabemos que si $V = S + T$, entonces todo elemento de $v \in V$ se escribe como la suma de un elemento de S y un elemento de T. Que la suma sea directa dice que hay un único elemento de S y un único elemento de T cuya suma da v.

Nos va a resultar útil el siguiente teorema:

Teorema de la dimensión (de subespacios). Sea V un K-espacio vectorial de dimensión **finita**, y sean S, T subespacios de V. Entonces

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Ejercicios de suma, intersección y suma directa

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S+T$ de V y determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x - iy = 0\}$, $T = \langle (3,-i), (3+i, 1-i) \rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(1) = 0\}$, $T = \langle X-1, X^2 - 3X \rangle$.

Resolución.

i) Para hallar la intersección escribimos a un vector de T de manera genérica como

$$a(3,-i) + b(3+i, 1-i) = (3a + 3b + ib, b - i(a+b)). \tag{1}$$

Para que un tal vector también esté en S debe verificar

$$\underbrace{3a + 3b + ib}_{x} - i\underbrace{(b - i(a+b))}_{y} = 0,$$

reordenando:

$$\underbrace{3a + 3b - (a+b)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(b-b)}_{\in\mathbb{R}} = 0,$$

de donde $2a + 2b = 0$, es decir, $b = -a$. Esto dice que los vectores que están en T y también en S son los que tienen a $b = -a$ en la expresión (1). O sea, son de la forma $(3a - 3a - ia, -a - i(a-a)) = (-ai, -a) = a(-i, -1)$. Por lo tanto $S \cap T = \langle (i,1) \rangle$.

Para la suma, busquemos un sistema de generadores de S. Uno podría tentarse de hacer el siguiente razonamiento: los vectores de S son de la forma $(iy, y) = y(i,1)$ y decir que S está generado por el vector $(i,1)$. **El problema con este razonamiento** es que cuando escribimos $y(i,1)$ y pensamos a estos vectores como múltiplos de $(i,1)$ nos estamos olvidando que $y \in \mathbb{C}$ (es una de las coordeandas de un vector en $\mathbb{C}^2$) **pero** $K = \mathbb{R}$ (estamos viendo a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). **Debemos entonces** hacer el siguiente razonamiento. Escribamos $x = a + ib$, $y = c + id$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces

$$0 = x - iy = (a + ib) - i(c + id) = a + d + i(b - c),$$

de donde $d = -a$ y $c = b$. Por lo tanto, los vectores de S son de la forma $(x,y) = (a + ib, b + i(-a)) = a(1,-i) + b(i,1)$. Por lo tanto, $S = \langle (1,-i), (i,1) \rangle$ y concluimos que $S + T = \langle (1,-i), (i,1), (3,-i), (3+i, 1-i) \rangle$.

Por el Teorema de la dimensión de subespacios, $\dim(S+T) = 2 + 2 - 1 = 3 < 4 = \dim(\mathbb{C}^2)$. De esto se deduce que $S + T \subsetneq \mathbb{C}^2$, también vimos que $S \cap T \neq \{0\}$, y por lo tanto la suma no es directa.

ii) Para resolver este ejercicio, primero veamos cómo son los polinomios de S. Como son polinomios que se anulan al evaluarlos en 1, conviene considerar el siguiente sistema de generadores de $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathbb{R}[X] = \langle 1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3, \dots \rangle.$$

Luego, los polinomios en S son de la forma

$$f = a_0 + a_1(X-1) + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3 + \dots,$$

y por lo tanto su derivada es

$$f' = a_1 + 2a_2(X-1) + 3a_3(X-1)^2 + \dots$$

Como tiene que valer $f'(1) = 0$, deducimos que $a_1 = 0$, y tenemos que S está generado por los siguientes polinomios

$$S = \langle 1, (X-1)^2, (X-1)^3, \dots \rangle.$$

Para calcular la suma notemos que $X - 1 \in T$, por lo que tenemos

$$S + T \supseteq S + \langle X - 1 \rangle = \mathbb{R}[X],$$

y entonces vale $S + T = V$.

Veamos ahora la intersección. Para esto, escribimos a un polinomio de T de manera genérica como

$$f = a(X-1) + b(X^2 - 3X).$$

Si $f \in S$, debe valer $f'(1) = 0$. Pero $f' = a + b(2X - 3)$ y por lo tanto $f'(1) = a - b$ que es cero si y solo si $b = a$. De esta forma, $f = a(X - 1 + X^2 - 3X) = a(X^2 - 2X - 1)$ y deducimos que $S \cap T = \langle X^2 - 2X - 1 \rangle$, de donde vemos que la suma no es directa.

Ejercicio 2. Sean $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $S = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x)\, \forall x \in \mathbb{R}\}$, $T = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)\, \forall x \in \mathbb{R}\}$, probar que $S \oplus T = V$.

Resolución: Para hallar la intersección, consideremos un vector $f \in S \cap T$. Como $f \in S$, sabemos que $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f \in T$, tenemos también que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto vale que $f(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir

$$2f(x) = 0\, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0\, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto dice que la única función en la intersección es la función cero, o sea que $S \cap T = \{0\}$.

Ahora veamos que cualquier función $f \in V$ se puede escribir como $f = f_S + f_T$ con $f_S \in S$, $f_T \in T$. Notemos que S es el subespacio de las funciones pares y T es el subespacio de las funciones impares.

Sea $g(x) = f(x) + f(-x) \in V$, g es par porque $g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$, es decir, $g \in S$. Si consideramos $h(x) = f(x) - f(-x)$, tenemos que h es impar porque $h(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -h(x)$, es decir, $h \in T$. Pero $g(x) + h(x) = (f(x) + f(-x)) + (f(x) - f(-x)) = 2f(x)$, por lo que podemos escribir

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}g(x)}_{f_S} + \underbrace{\frac{1}{2}h(x)}_{f_T},$$

como queríamos. Así deducimos que $V = S \oplus T$.

Coordenadas

Vimos que un conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ se dice una *base* del K-espacio vectorial V si es un conjunto de generadores de V que es linealmente independiente. Una definición alternativa es la siguiente:

> $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V si para todo $v \in V$ existen **únicos** $k_1, \dots, k_n \in K$ tales que $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$.

A partir de esto, fijada la base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, a cada vector v le corresponde un único conjunto de coeficientes $k_1, \dots, k_n \in K$. Entonces, le podemos asignar a v las *coordenadas* $(k_1, \dots, k_n)$ *en la base* $\mathcal{B}$, que se determinan de forma única para v y que, a su vez, determinan de forma única a v. La n-upla de coordenadas se suele notar $[v]_{\mathcal{B}}$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = (k_1, \dots, k_n) \quad \Leftrightarrow \quad v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n.$$

> **Ejercicio 3.** Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, encontrar las coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Resolución: (Tarea: verificar que $\mathcal{B}$ es realmente una base de $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.) Tenemos que buscar $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2k_2 + k_3 & k_3 + 2k_4 \\ k_1 + k_4 & k_1 + k_2 + k_3 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a resolver el sistema lineal de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} 2k_2 + k_3 & = & 1 \\ k_1 + k_4 & = & 1 \\ k_3 + 2k_4 & = & 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 & = & 1 \end{array} \right.$.

Operamos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_1 \\ F_4 - F_2 \to F_2 \\ F_1 \to F_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 - 2F_2 \to F_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 + F_3 \to F_4}{\longrightarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

De acá obtenemos $k_4 = \frac{1}{2}, k_3 = 0, k_2 = \frac{1}{2}, k_1 = \frac{1}{2}$, y por lo tanto $[v]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.