MATEMÁTICA 2 - Primer Cuatrimestre 2017

Práctica 6 - Diagonalización y Forma de Jordan

Ejercicio 1. Para las matrices A siguientes, calcular el polinomio característico, los autovalores y bases y dimensiones de los espacios de autovectores correspondientes a cada autovalor (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

Ejercicio 5. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

Ejercicio 6. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Para un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, se define $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$. Probar que para todo $x^{(0)}$ se cumple $x^{(n)} \to 0$ (es decir, $x_i^{(n)} \to 0$, $1 \le i \le 3$).

Ejercicio 9. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

Ejercicio 10. Encontrar una tercera columna para que la matriz $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea ortogonal siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

Ejercicio 11. Encontrar $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(U) = -1$.

Ejercicio 12. Encontrar una tercera fila para que la matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sea unitaria siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t A U$ es diagonal.

Ejercicio 14. Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitaria tal que $\overline{U^t} A U$ sea diagonal para la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

Ejercicio 16. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $f(3,4) = (5,0)$.

Ejercicio 17. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle(1,0,1)\rangle$.

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotación de eje $\langle(2,-2,-1)\rangle$ y ángulo $\pi/2$. Hallar $f(4,-1,1)$.

Ejercicio 19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es una rotación.

b) Hallar una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 21. Hallar una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2) = (0, \sqrt{2}, 0)$.

Ejercicio 22. Hallar una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,-1,2) = (0,3,0)$.

Ejercicio 23. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 24. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 25. Para una matriz A notamos $m_A(t)$ a su polinomio minimal.

a) Si $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ es tal que $m_A(t) = t^3$, determinar las posibles formas de Jordan de A.

b) Si $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ es nilpotente y tal que $\text{rg}(A) = 6$, ¿cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ con $\text{rg}(A) = 9$?

Ejercicio 26. Hallar la forma y la base de Jordan para cada una de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 27. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(t) = t^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 28. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ con autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 distintos tal que:

$$\begin{array}{llll} \text{rg}(A-\lambda_1 I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 11, & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^3 = 10, & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^4 = 10 \\ \text{rg}(A-\lambda_2 I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_2 I)^2 = 11, & \text{rg}(A-\lambda_2 I)^3 = 10, & \text{rg}(A-\lambda_2 I)^4 = 9, \\ \text{rg}(A-\lambda_3 I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 12, & \text{rg}(A-\lambda_3 I)^3 = 11. & \end{array}$$

Ejercicio 29. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 30. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n.$$