MATEMATICA 2 - Primer Cuatrimestre 2017

Práctica 4 - Producto interno

En lo que sigue, $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado, y se considera la norma que define ese producto interno.

Ejercicio 1. Calcular la norma de cada uno de los siguientes vectores, y normalizarlos

a) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = 3u$ y $z = u + v$

b) $u = (i, 0, 0)$, $v = (1, 0, i)$

Ejercicio 2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos

a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 1, -2)$

b) $A = (i + 1, i, i)$, $B = (1, i, 0)$

Ejercicio 3.

a) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. ¿Es único?

b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

Ejercicio 4. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n, $n \geq 2$:

a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.

b) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in K^n$, entonces $v = w$.

Ejercicio 5. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

a) $v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 1)$

b) $v = (1, -2, 4), w = (-2, 1, 1)$

c) $v = (1, i, 1), w = (i, 0, 1)$

d) $v = (1, i, 1), w = (i, 1, 0)$

Ejercicio 6. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

a) $v = (1, 1), w = (1, 0)$

b) $v = (3, 2, -1), w = (0, 1, 2)$

Ejercicio 7. Para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define $\langle x, y\rangle_A = 4x_1y_1 + 5x_2y_2$.
Encontrar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\langle x, y\rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay\rangle$ y deducir que $\langle , \rangle_A$ es un producto interno.

Ejercicio 8. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno definido por $\langle x, y\rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay\rangle$ para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la norma del vector $(2, 1, -1)$ con respecto a ese producto interno.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para dicho producto interno.

Ejercicio 9. Sea la recta $S = \langle(3,4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

a) El complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

b) $p(3,4)$, $p(-4,3)$ y $p(2,1)$.

c) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3,4)$, $(-4,3)$ y $(2,1)$, y la distancia de esos puntos a la recta S.

d) Una fórmula explícita para $p(x_1,x_2)$ y la matriz $[p]_\mathcal{E}$ de p en la base canónica $\mathcal{E}$.

e) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

b) Calcular las coordenadas de $v = (1,1,1)$ y de $w = (1,0,0)$ en $\mathcal{B}'$.

c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

d) Calcular el punto de S más cercano a w, y la distancia que los separa. Ídem para v.

Ejercicio 11. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0,i,0);(1,0,i);(0,0,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 12. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

a) $\langle(1,2,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $\{x \in \mathbb{R}^3 / \, 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

c) $\langle(i,1,1),(-1,0,i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

d) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \, / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$.

Ejercicio 13. Sea $S = \langle(1,1,0,-1),(-1,1,1,0),(2,-1,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$, y la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

Ejercicio 14. En $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.

Ejercicio 15. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, *a*) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\, X,\, X^2\}$.

b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.

c) Hallar el polinomio constante más cercano a X y el más cercano a X^2.

Ejercicio 16.

a) En $\mathcal{C}([-1,1])$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\;dx$, hallar el polinomio de grado ≤ 2 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

b) En $\mathcal{C}([0,\pi])$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)\;dx$,

i) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

ii) hallar el el elemento de $\langle 1, \cos x, \operatorname{sen} x\rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 17.

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $N(A)$ es ortogonal al espacio columna $E_C(A)$.

b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $A^* = A$. Probar que $N(A)$ es ortogonal a $E_C(A)$.

Ejercicio 18. $(*)$ *La solución de longitud mínima de un sistema compatible*
Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

a) Intuitivamente: hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ representando a $N(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $N(A)$).

b) Esta parte prueba que si existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$ y $x \perp N(A)$, entonces $\overline{x}$ es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall\, x$ solución, $x \neq \overline{x}$, se tiene $\|\overline{x}\| < \|x\|$:
Usando que si $x \neq \overline{x}$, entonces existe $z \in N(A)$ no nulo tal que $x = \overline{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \overline{x} + z, \overline{x} + z\rangle$ y concluir (recordar que $\overline{x} \perp N(A)$).
(Observar que esto implica en particular que si existe tal $\overline{x}$, entonces es único.)

c) Este parte prueba que siempre existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$ y $x \perp N(A)$.

i) Justificar que sin perdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \leq n$ y $\operatorname{rg}(A) = m$.

ii) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp N(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0

iii) Concluir del item anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp N(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall\, b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp N(A)$ tiene una única solución.

d) Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$