Lógica y computabilidad
Primer cuatrimestre — 2017

Práctica 7: Teoría de la computabilidad

Primera parte

1. Probar que una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

es recursiva.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

3. Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u,v,w)$ tal que

$$\Phi^{(3)}(u,v,w,z) = \Phi_{g(u,v,w)}(z).$$

4. Probar que las siguientes funciones son parcialmente computables:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \Phi(x,x)+1 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Random Fact. El país más cercano a la antípoda de Pyongyang, la capital de Corea del Norte, es Argentina. En caso de que desde allí se emitiera radiación nuclear, Argentina sería uno de los lugares más seguros.

5. (*a*) Sea f la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x,y) = \psi_{h(x)}(y)$.

(*b*) Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.

(*c*) Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.

6. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x))$ no es computable. Sugerencia, considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x, f^{-1}(x))\uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7. Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Dom f \\ \uparrow & \text{si } x \notin Dom f \end{cases}$$

8. Probar que la siguiente función no es parcialmente computable:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imag en de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9. Decimos que una función parcialmente computable f es *extensible* si existe una función g total computable tal que $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio de f. Probar que existe una función parcialmente computable que no es extensible.

10. Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable. ¿Qué podría decir de f cuando g es total computable?

Segunda parte

11. Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo.

12. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{ rango de } \psi_x\}$.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \psi_x = \psi_y\}$.
3. $\{x \in \mathbb{N} : \text{ rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.

13. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.

14. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

1. Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \backslash B$ es recursivo.
2. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.

15. Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

16. Probar que las siguientes funciones no son computables.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si Dom } \Psi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x = \Psi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Psi_x \text{es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

17. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

1. $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(0) \downarrow\}$.
2. $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \downarrow\}$.
3. $\{x \in \mathbb{N} : \text{ dominio de } \psi_x = \emptyset\}$.

18. Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango f es B.

19. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{Dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

20. Probar que los siguientes conjuntos son recursivos.

(a) $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x)\text{ se puede computar en menos de } x \text{ pasos}\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{ el programa con índice } x \text{ tiene menos de } x \text{ líneas}\}$

21. Decidir si son recursivos los siguientes conjuntos.

(a) $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) = 0\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) < x\}$