
LÓGICA Y COMPUTABILIDAD

Primer cuatrimestre — 2017

Práctica 6: Recursividad primitiva

Funciones primitivas recursivas

1. Sean ψ y φ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar si existen funciones a partir de las cuales se obtenga f por recursión primitiva y, en caso de que existan, darlas.

- (a) $f(x, 0) = \psi(x)$,
 $f(x, y + 1) = f(x, y) + \varphi(y, x)$.
- (b) $f(x, 0) = \varphi(0, x)$,
 $f(x, y + 1) = \varphi(f(x, y), y + 1)$.
- (c) $f(x, 0) = 17$,
 $f(x, y + 1) = f(0, y)$.
- (d) $f(x, 0) = 17$,
 $f(x, y + 1) = f(0, \varphi(x, y))$.

2. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

- (a) $\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y; \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$
- (b) (i) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$
(ii) $par(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par;} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- (c) (i) $sqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
(ii) $psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un cuadrado perfecto;} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

3. Sean ψ y φ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

- (a) La función f_1 de una variable dada por $f_1(0) = \psi(0) + 1$ y

$$f_1(x) = \psi(\psi(\dots(\psi(x) + 1)\dots) + 1) + 1,$$

donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x + 1$. Por ejemplo, $f_1(1) = \psi(\psi(1) + 1) + 1$.

- (b) La función f_2 de dos variables dada por $f_2(x, 0) = \varphi(x, 0)$ y

$$f_2(x, y) = \varphi(\varphi(\varphi(\dots(\varphi(\varphi(x, y), y - 1)\dots 2), 1), 0),$$

donde la cantidad de veces que aparece φ es $y + 1$. *Exempli gratia*, $f_2(x, 1) = \varphi(\varphi(x, 1), 0)$.

4. Sea g una función primitiva recursiva de una variable. Probar que cada una de las siguientes funciones es recursiva primitiva usando sumas y productos acotados.

- (a) $f(y) = \#\{i \in [0, y] \mid g(i) > 3\}$.
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i + 1) > g(i) \text{ para todo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- (c) $f(w, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x + 1), \dots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Sean g una función recursiva primitiva de $n + 1$ variables y s y t funciones recursivas primitivas de una variable. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas.

- (a) $f_1(x_1, \dots, x_n, y) = \max_{0 \leq i \leq y} (g(x_1, \dots, x_n, i))$.
- (b) $f_2(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \max_{s(y) \leq i \leq t(y)} (g(x_1, \dots, x_n, i)) & \text{si } s(y) \leq t(y); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Random Fact. Rocket mail es la entrega de correo por cohete o misil: el cohete aterriza al desplegar un paracaídas interno a su llegada al punto de destino. Varias organizaciones lo han llevado a cabo en muchos países diferentes, con niveles variables de éxito. Nunca se ha visto extensivamente como una opción viable para la entrega de correo, debido al costo de la operación y los numerosos fracasos registrados.

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

- (a) $shr(x, n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.
- (b) $lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor \log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- (c) $dig(x, n)$ es el n -ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando con 0. Verbigracia, $dig(13, 0) = 1$, $dig(13, 1) = 0$, $dig(13, 2) = 1$, $dig(13, 3) = 1$, $dig(13, 4) = 0$.
- (d) $f(x)$ es el número de unos en la representación binaria de x .
- (e) (i) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n .
(ii) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n .
- (f) (i) $G(n, m)$ es la cantidad de números primos entre n y m .
(ii) $G(n, m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.
- (g) Probar que la función de Fibonacci es primitiva recursiva. Esta función está definida por

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n+1) + F(n) \end{aligned}$$

†7. Probar que la siguiente función es primitiva recursiva.

$$\begin{aligned} H(0) &= 0 \\ H(n+1) &= 1 + \prod_{i=1}^n H(i) \end{aligned}$$

Clases PRC

8. Sean \mathcal{C} una clase PRC y $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{C}$. Mostrar que si se satisfacen

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z) &= g_1(z, y, x), \\ h_2(x) &= g_2(x, x, x), \\ h_3(w, x, y, z) &= h_1(g_3(w, y), z, g_4(2, g_4(y, z))) \end{aligned}$$

entonces h_1, h_2 y h_3 también pertenecen a \mathcal{C} .

9. Probar que la clase de todas las funciones totales es PRC.

10. Sean $n > 0$ y \mathcal{C} la clase de las funciones totales de no más de n variables. Mostrar que \mathcal{C} no es PRC.