Lógica y computabilidad
Primer cuatrimestre — 2017

Práctica 2: Interpretaciones y modelos de primer orden

Semántica y valuaciones proposicionales

Recordemos que dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v.

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Dado dadas variables *proposicionales* $p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots$, podemos interpretarlas a partir de fórmulas *sin variables libres* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \ldots$, reemplazando cada instancia de p_i la fórmula α_i. A la fórmula que queda de sustituir en una fórmula proposicional φ las variables por las fórmulas sin variables libres $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la notamos φ_α.

(*a*) Probar que a partir de dicha sustitución, toda interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ da lugar a una valuación proposicional $v_{\mathcal{I}}$ en la cual $v_{\mathcal{I}}(p_i) = V_{\mathcal{I}}(\alpha_i)$.

(*b*) Sea φ una fórmula proposicional. Si φ es una tautología entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi_\alpha) = 1$. De la misma manera, si φ es una contradicción entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi_\alpha) = 0$.

2. Sea $v : Form \to \{0, 1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

a) $\alpha = (\neg p_1)$.
b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.
c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.
d) $\alpha = (\neg p_4)$.
e) $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.
f) $\alpha = (p_1 \to p_1)$.

3. Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:

1. $(p_1 \wedge p_2)$; $(\neg((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$.
2. $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
3. $(p_1 \to p_2)$; $((\neg p_2) \to (\neg p_1))$.

4. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

a)

p_1	p_2	p_3	α	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

b)

p_1	p_2	p_3	α	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

5. Sean $\alpha, \beta \in Form$.

1. Probar que si $(\alpha \wedge \beta)$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.
2. Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.

6. Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes (ver Práctica 1).

(*a*) ¿Son necesariamente equivalentes?
(*b*) ¿Si α es una tautología, β es una tautología?
(*c*) ¿Si α es una contradicción, β es una contradicción?
(*d*) ¿Si α es una contingencia, β es una contingencia?

7. Dado un conjunto de conectivos, se dice que es *adecuado* si toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de este conjunto.

(*a*) Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.
(*b*) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$.

Interpretaciones

Un lenguaje de primer orden se dice *con igualdad* si posee un símbolo de relación binaria (notado con =) de modo tal que en toda interpretación, éste siempre se interpreta como la relación de igualdad.

8. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario f y una constante c. Para cada una de las siguientes interpretaciones

(*a*) $U_1 = \mathbb{N}$, $f_1(x,y) = x + y$, $c_1 = 1$; y
(*b*) $U_2 = \mathbb{N}$, $f_2(x,y) = x \cdot y$, $c_2 = 0$,

determinar qué propiedad describen las siguientes sentencias y analizar si son ciertas o falsas en dicha interpretación. En caso de que sean ciertas, determinar si son ciertas en cualquier interpretación.

1. $\forall x \exists y \left(x = f(y,y) \vee x = f(f(y,y), c)\right)$
2. $\exists y \forall x \left(x = f(y,y) \vee x = f(f(y,y), c)\right)$
3. $\forall x \forall y \left(f(x,y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c)\right)$,

9. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, que no posee ningún otro símbolo. Determinar sentencias que describan en una interpretación arbitraria las siguientes propiedades:

(*a*) Existen al menos dos elementos.
(*b*) Existen exactamente dos elementos.
(*c*) Existen a lo sumo dos elementos.

10. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, que posee además un símbolo de relación P. Determinar sentencias que describan en una interpretación arbitraria las siguientes propiedades:

(*a*) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno de ellos cumple la propiedad P.
(*b*) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.
(*c*) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

Recordar Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje e $\mathcal{I}$ una interpretación de dicho lenguaje. Un subconjunto A del universo de I se dice *definible* (o *distinguible*) si existe una fórmula φ de $\mathcal{L}$ que con una única variable libre x, de modo tal que la sentencia que queda de hacer la sustitución $\varphi(x/u)$ en el lenguaje extendido $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ (para algún elemento u del universo $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$) es verdadera en $\mathcal{I}$ si y sólo si $u \in A$. En otras palabras

$$A = \{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} : \varphi(x/u) \text{ es verdadero}\}.$$

Un elemento u se dice definible si $\{u\}$ es definible.

11. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f y $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones de $\mathcal{L}$: a) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$. b) $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

12. Probar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos definibles de un universo, entonces la unión $\bigcup_{i_1}^{n} A_i$ y la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ son definibles.

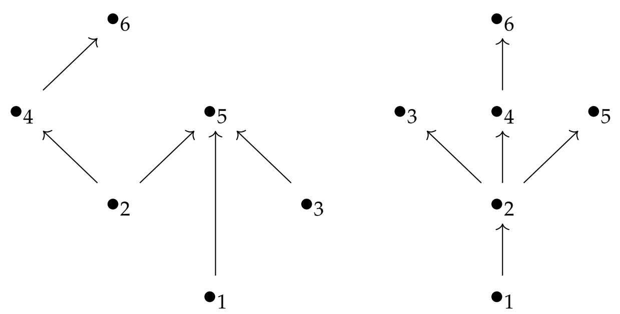
13. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n+1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

14. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y que posee símbolo de predicado binario $\leq$. Determinar sentencias que definan a $\leq$ como una relación de orden, es decir, determinar sentencias que determinen exactamente que $\leq$ es reflexivo, antisimétrico y transitivo. Decimos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje *con orden* si posee dicho símbolo y requerimos que en toda interpretación de $\mathcal{L}$, $\leq$ sea una relación de orden. Esto es, las interpretaciones son modelos para las sentencias antes descriptas.

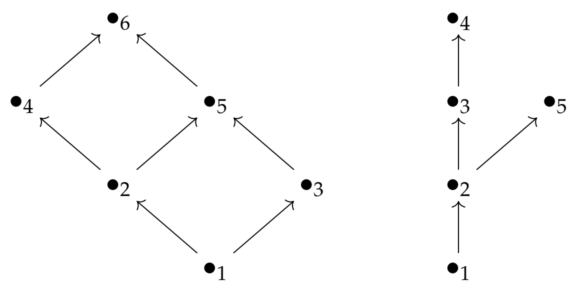
15. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con orden. Determinar que conjuntos son definidos por la fórmula

$$\alpha = \exists y \exists z \left((y \leq x) \wedge \neg (x \leq y) \wedge (z \leq x) \wedge \neg (x \leq z) \wedge \neg ((y \leq z) \vee (z \leq y)) \right)$$

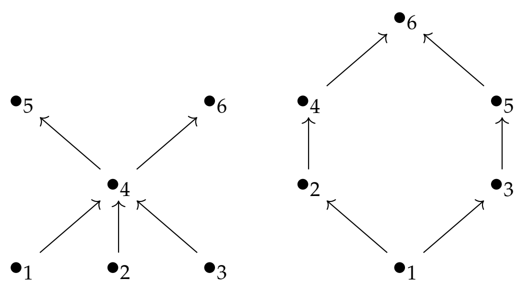
en las siguientes interpretaciones y buscar una fórmula que se verifique sólo para 6.



16. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con relación de orden $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:



17. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con orden $\leq$. ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de la siguientes interpretaciones?



18. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de función binario. Decidir si las siguientes interpretaciones de $\mathcal{L}$ son isomorfas.

(*a*) $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{N}, \cdot)$.
(*b*) $(\mathbb{Z}, <)$ y $(\mathbb{Z}, >)$.
(*c*) $(\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$.
(*d*) $(\mathbb{Z}, <)$ y $(\mathbb{N}, <)$.
(*e*) (Difícil) $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

Modelos

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y un conjunto de sentencias Γ, decimos que una interpretación $\mathcal{I}$ es un *modelo* para Γ si todas las sentencias de Γ son verdaderas al interpretarlas en $\mathcal{I}$.

19. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario f y uno de constante c. Para cada una de las siguientes sentencias hallar dos modelos, uno con universo de interpretación finito y uno infinito.

(*a*) $\forall x \forall y (f(x,x) = f(y,y) \to x = y)$

(*b*) $\forall x \exists y (x = f(y,y))$

(*c*) $\forall x (f(x,c) = c)$

20. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función f y uno de constante c. Para cada uno de los siguientes interpretaciones, dar una sentencia de la cual sean modelos, pero no que no sea universalmente válida.

(*a*) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$, $f_{\mathcal{I}}(x,y) = x \cdot y$ y $c_{\mathcal{I}} = 1$.

(*b*) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{C}$, $f_{\mathcal{I}}(x,y) = Re(x) + Im(y) + i$ y $c_{\mathcal{I}} = i$.

Random Fact. El algoritmo PageRank le debe su nombre no al hecho de que *ranquee* las páginas web sino a Larry Page.

21. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f. Para cada una de las siguientes interpretaciones, dar sentencias de la cual una interpretación sea un modelo pero no la otra y luego al revés.

(*a*) $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{N}, +)$.

(*b*) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

(*c*) $(\mathbb{R}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, \cdot)$.

22. Para las interpretaciones de los Ejercicios **1.15**, **1.16** y **1.17** de un lenguaje con orden, dar un enunciado para el cual una interpretación es modelo y la otra no.

23. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, sin otros símbolos y $n \in \mathbb{N}$. Dar una sentencia φ, de modo tal que todo modelo de φ tenga al menos n elementos.

24. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, sin otros símbolos. Dar un conjunto de sentencias Γ de modo tal que todo modelo de Γ sea infinito.