La clase de hoy

22 de abril de 2017

1. Satisfacibilidad

1.1. Vamos a extender ahora nuestra noción de verdad bajo una interpretación de enunciados a fórmulas. Por supuesto, el tema es cómo interpretar las variables libres.

Dada una función $s : \mathrm{Var} \to D$, decimos que I *satisface* φ con s y escribimos $\models_I \varphi[s]$ si la traducción de φ determinada por I, donde cada variable libre es traducida por su imagen via s, es verdadera. En [End01] puede encontrarse una definición más precisa, que es la formalización de la que damos aquí.

En [Men97] se prefiere hablar de que una sucesión de elementos $d = (d_1, d_2, \dots)$ de D satisfaga una fórmula: se refiere a que I satisfaga la fórmula con la función $\mathrm{Var} \ni \nu_i \mapsto d_i \in D$ que determina esta sucesión. Si en una fórmula φ las variables libres se encuentran en $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, notamos

$$\models_I \varphi[\![d_1, \dots, d_n]\!] \coloneqq \ \models_I \varphi[s].$$

Observemos que si φ es un enunciado, o bien la interpretación I satisface φ con s para toda s o bien no la satisface con ninguna.

Definición. (I) *Una fórmula φ (quizás con variables libres) es cierta para la interpretación I con universo D si $\models_I \varphi[s]$ para toda $s : \mathrm{Var} \to D$.*

(II) *Una fórmula φ es falsa para M si no hay ninguna $s : \mathrm{Var} \to D$ tal que $\models_I \varphi[s]$.*

(III) *Una interpretación I es un modelo para un conjunto de formulas Γ si $\models_I \varphi$ para toda $\varphi \in \Gamma$.*

{ej:sqrt}

1.2. *Ejemplo.* Consideremos el lenguaje con símbolos de constante 0 y 1 y dos símbolos de función 2-aria, $+$ y $\cdot$. El cuerpo de números reales —sin su orden ni su axioma de supremo— da una interpretación que llamamos $\mathbb{R}$ y es la sugerida por la notación para este lenguaje. La fórmula φ, igual a

$$\exists y (x = y \cdot y),$$

tiene como variable libre solamente a x. Sea ahora $s : \mathrm{Var} \to \mathbb{R}$; que $\mathbb{R}$ satisfaga ϕ sujeto a s quiere decir precisamente que $s(y)$ es no negativo. Otra interpretación de este lenguaje viene dada por el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ junto con la suma y el producto usuales y sus neutros respectivos. En este caso, como todo número tiene raí cuadrada vale que $\models_{\mathbb{C}} \varphi[s]$ para toda s.

Recíprocamente, uno puede pensar cuáles son las posibles s tales que $\models_{\mathbb{R}} \varphi[s]$. Puesto que la única variable libre que aparece en φ es y, solo nos interesan los posibles valores de las s en y, y la pregunta correcta es entonces cuáles son los elementos d de dominio de la interpretación tales que $\varphi_{\mathbb{R}}[s$ tal que $s(y) = d]$ es cierta: son, por supuesto, los números no negativos. Hemos probado que los números no negativos son definibles.

1.1. Definibilidad

1.3. Sean, para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, I una interpretación y φ una fórmula con variables libres contenidas en $\{v_1, \dots, v_k\}$. En el universo D construimos la relación k-aria dada por el subconjunto de D^k

$$\{(a_1, \dots, a_k) \text{ tal que } \models_I \phi[\![a_1, \dots, a_k]\!]\}.$$

A esta relación se la llama la que φ *define* en I; una relación en D se dice *definible* en I si existe una fórmula de $\mathcal{L}$ que la define.

1.4. *Ejemplo.* Consideremos el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con constante 0, función 1-aria S, igualdad y dos símbolos de función 2-aria $+$ y $\cdot$. Podemos interpretar $\mathcal{L}$ con universo $\mathbb{N}_0$ y el significado que la notación sugiere para los símbolos.

(1) La relación de orden está definida por $\exists z(x + Sz = y)$.

(2) Para cada número natural n, afirmamos que la relación 1-aria —es decir, el conjunto— $\{n\}$ es definible. En efecto, una fórmula que la define es

$$v_1 = \underbrace{S \dots S}_{n \text{ veces}} 0.$$

(3) El conjunto de los números primos también es definible. Hay que formalizar la idea de que un natural n es primo si es mayor a 1 (equivalentemente, existe un natural tal que su sucesor mas uno da n) y en todo par de naturales que factoricen a n alguno debe ser 1.

(4) ¿Cómo probamos que algo es no definible?

1.5. En matemática, al estudiar grafos o estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, espacios vectoriales o, más aún, los números reales, utilizamos un conjunto de axiomas y estudiamos a quienes cumplen esos axiomas. Esto se puede pensar como que los axiomas son sentencias en un lenguaje de primer orden y los objetos de estudio son modelos de esas sentencias.

Sea Σ un conjunto de sentencias en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y denotemos por $\operatorname{Mod}\Sigma$ a la clase de modelos de Σ. Una clase de interpretaciones de $\mathcal{L}$ es una *clase elemental* si es la clase de modelos de alguna sentencia y una *clase elemental en el sentido amplio* si es $\operatorname{Mod}\Sigma$ para algún conjunto de sentencias Σ.

{ej:grafos}

1.6. *Ejemplo.* (*1*) Supongamos que en $\mathcal{L}$ hay solamente igualdad y un predicado binario E. Un grafo es una interpretación de este lenguaje. En efecto, el universo de la interpretación es el conjunto de vértices del grafo y la relación binaria es el conjunto de flechas. La sentencia

$$\forall x(\neg xEx \wedge \forall y(xEy \to yEx))$$

será cierta en las interpretaciones en que la relacion sea antisimétrica y transitiva. Así, los modelos de esta sentencia son precisamente los grafos no dirigidos sin loops, que entonces son una clase elemental. Sin embargo, los grafos no dirigidos sin loops que además son finitos no son una clase elemental. lo explicaremos?

(2) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje en el que solo hay igualdad y un símbolo de función binario $\circ$. Una interpretación de este lenguaje se llama un *magma*. La clase de todos los grupos es una clase elemental: en efecto, es la clase que modela la conjunción de las sentencias siguientes, que dan los axiomas de grupos.

$$\begin{aligned}
&\forall x\forall y\forall z\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad \textit{(asociatividad)}\\
&\forall x\forall y\exists z\ x \circ z = y \\
&\forall x\forall y\exists z\ z \circ x = y.
\end{aligned} \tag{1}$$

{eq:grupos}

Tomando $y = x$ en las últimas dos obtenemos la existencia de neutros a izquierda y a derecha, de la que se puede deducir que son el mismo ($1_l = 1_l \circ 1_r = 1_r$); tomando y igual a ese neutro, dicen que hay un inverso a cada lado.

Poniendo $\lambda_2 = \exists x\exists y\neg(x = y)$ estamos diciendo que hay al menos dos elementos. Si, para cada n, escribimos la sentencia λ_n dada por

$$\exists x_1 \dots \exists x_n((x_1 \neq x_2)) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \neq x_n))$$

serán modelos de λ_n aquéllas interpretaciones en las que haya al menos n elementos.

Así, la clase de interpretaciones en las que son ciertas las sentencias (1) y $\{\lambda_n : n \geq 2\}$ es justamente la de los grupos infinitos, que resulta así una clase elemental en el sentido amplio. Se puede probar que, sin embargo, no es una clase elemental: la idea es que para hacer de estas sentencias una única sentencia habría que yuxtaponer infinitas.

(3) Espacios vectoriales. ←

2. Isomorfismos de interpretaciones

2.1. Definición. *Un* morfismo *entre dos interpretaciones* I *y* B *es una función* $h : |I| \to |B|$ *de manera que*

1. *para cada símbolo de predicado* n*-ario* P *y cada* $(a_1, \dots, a_n) \in |I|^n$ *se tiene*

   $$(a_1, \dots, a_n) \in P^I \textit{ si y solo si } (h(a)_1, \dots, h(a)_n) \in P^B;$$

2. *para cada símbolo de función* n*-aria* f *y cada* $(a_1, \dots, a_n) \in |I|^n$ *se tiene*

   $$h(f^I(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a)_1, \dots, h(a)_n);$$

3. *si* c *es un símbolo de constante,* $h(c^I) = c^B$.

Decimos que h *es un* isomorfismo *si además de cumplir estas condiciones es una biyección.*

{thm:hom}

2.2. Teorema (Homomorphism Theorem). *Sea* h *un morfismo entre las interpretaciones* I *y* B *y sea* $s : \mathrm{Var} \longrightarrow |I|$*; sea* $\bar{s}$ *la extensión de* s *a los términos. Similarmente, notamos* $\overline{h \circ s}$ *a la extensión de* $h \circ s : \mathrm{Var} \longrightarrow |B|$ *a los términos.*

(I) *Es* $h \circ \bar{s} = \overline{h \circ s}$.

(II) *Para cada fórmula sin cuantificadores ni símbolo de igualdad* φ *es*

$$\models_I \varphi[s] \textit{ si y solo si } \models_B \varphi[h \circ s]; \tag{2}$$

{eq:homthm}

y, si h *es un isomorfismo, vale* (2) *aún con símbolo de igualdad. Si* $h : |I| \longrightarrow |B|$ *es sobreyectiva entonces podemos en* (2) *quitar la restricción de no tener cuantificadores.*

Demostración. Ver [Men97, p. 97]. □

Dos interpretaciones se dicen *elementalmente equivalentes* si satisfacen precisamente las mismas sentencias. Del Teorema 2.2 se desprende el siguiente corolario.

Corolario. *Las interpretaciones isomorfas son elementalmente equivalentes.*

2.3. *Ejemplo.* Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario.

(1) Hay interpretaciones elementalmente equivalentes que no son isomorfas; un ejemplo de esto está dado por $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$, que no pueden ser isomorfas por tener distinto cardinal.

(2) Sean N y M los conjuntos de enteros mayores o iguales que 0 y 1, respectivamente. Tanto $(N, <_N)$ como $(M, <_M)$ son interpretaciones de $\mathcal{L}$. Como la función $h : M \ni n \mapsto n - 1 \in N$ es una biyección que respeta el orden, las interpretaciones son isomorfas. En particular, estas interpretaciones son elementalmente equivalentes.

   Más aún, como la inclusión de M en N también las respeta decimos que M es una subestructura de N. Dados $s : V \longrightarrow M$ y una fórmula sin cuantificadores φ se tiene entonces

   $$\models_{(M, <_M)} \varphi[s] \textit{ si y solo si } \models_{(Nz, <_N)} \varphi[s].$$

   Observemos que si φ hubiera tenido cuantificadores esto no necesariamente habría sido cierto, puesto que, por ejemplo, un existe es más fácil de cumplir cuando se refiere a un conjunto más grande por y un para todo es menos exigente en uno más chico. Aquí, en M y en N los primeros elementos son distintos, y por lo tanto la fórmula cuya variable libre es el primer elemento es cierta evaluándola en lugares distintos.

2.4. Un *automorfismo de una interpretación* I es un isomorfismo de I en I; decimos que I es *rígida* si su único automorfismo es la identidad. Si h es un automorfismo de I, R es una relación n-aria y $a \in |I|^n$ entonces

$$a \in R \textit{ si y solo si } h(a) \in R. \tag{3}$$ {eq:rigidez}

Este hecho nos permite mostrar que algunas relaciones no son definibles: efectivamente, si las relaciones definibles deben ser preservadas por los automorfismos basta encontrar un automorfismo que no preserve una relación para probar que ésta no es definible.

Ejemplo. (1) Consideremos la interpretación $(\mathbb{R}, >_{\mathbb{R}})$. Un automorfismo es en este caso cualquier función biyectiva que preserve el orden, esto es, que sea estrictamente creciente, como por ejemplo la raíz cúbica. Puesto que $\sqrt[3]{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{N}$, no se verifica (3) y por lo tanto los naturales no son definibles en este contexto.

(2) Recordemos del Ejemplo 1.2 el lenguaje con igualdad, dos constantes y símbolos de función binarios $+$, $\cdot$; los complejos dan un modelo que satisface el enunciado $\forall x \exists y (y \cdot y = x)$. La función

$$h : \mathbb{C} \ni a + ib \mapsto a - ib \in C,$$

esto es, conjungar, da un isomofismo de interpretaciones y manda i a $-i$. Esto dice que $\{i\}$ no es definible.

Bibliografía

[CM98] R. Cignoli and G. Martínez, *Curso de Lógica* (1998).

[End01] H. B. Enderton, *A mathematical introduction to logic*, Second Edition, Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2001.

[Men97] E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, Fourth Edition, Chapman & Hall, London, 1997.