Geometría Diferencial 2017

Soluciones del Segundo Parcial - 29/06/17

1. Consideremos la *forma de contacto*

$$\omega = \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{d}x_i$$

en $\mathbb{R}^{2n+1}$ con coordenadas $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, z)$. Hallar todos los campos tangentes $R \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+1})$ tales que

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega(R, -) & \equiv 0 \\ \omega(R) & \equiv 1. \end{cases}$$

Un tal campo R se denomina un *campo de Reeb*.

Solución: Si escribimos

$$R = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial y_i} + h\frac{\partial}{\partial z}.$$

Es claro por las propiedades de la diferencial exterior que

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Si evaluamos la primera condición

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega\left(R, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j \left(R, \frac{\partial}{x_i}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_j(R) & \mathrm{d}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ \mathrm{d}y_j(R) & \mathrm{d}y_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} f_j & \delta_{ij} \\ g_j & 0 \end{pmatrix} = -g_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_i = 0$ para todo i. Evaluando $\mathrm{d}\omega\left(R, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ obtenemos de manera similar que $f_i = 0$ para todo i. Luego, $R = h\frac{\partial}{\partial z}$ y la última condición nos dice $\omega(R) = h \equiv 1$. Entonces $R = \frac{\partial}{\partial z}$ es el único campo de Reeb. □

2. Sea M una variedad compacta y conexa de dimensión n y $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo tangente, entonces existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $L_X\omega = f\omega$ llamada la *divergencia* $\operatorname{div} X$ de X. Probar que para todo campo X existe algún punto $p \in M$ tal que $\operatorname{div} X(p) = 0$.

Solución: Por la fórmula mágica de Cartan, sabemos que $L_X\omega = \mathrm{d}\iota_X\omega$ (pues $\mathrm{d}\omega = 0$ ya que no hay $n+1$-formas en M). Ahora, por el teorema de Stokes, tenemos que

$$\int_M L_X\omega = \int_M \mathrm{d}\iota_X\omega = \int_{\partial M} \iota_X\omega = 0.$$

Si f no se anulara en ningún punto debería ser siempre positiva o siempre negativa por conexión. Por lo tanto, $f\omega$ sería nuevamente una forma de volumen y su integral no podría ser 0. Como $L_X\omega = f\omega$, esto concluye la prueba. $\square$

3. Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| \leq 1\}$ la bola unitaria y sea $f : B \to B$ una función suave.

a) Probar que

$$\int_B \det(Df(x_1, \cdots, x_{n+1}))\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}$$

depende solamente del valor de f en S^n.

b) Probar que no existe una retracción suave $r : B \to \partial B = S^n$.

c) Concluir que toda función $f : B \to B$ suave tiene un punto fijo.

Solución: Para la primera parte, notemos que si

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}\, x_i\, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$$

es la forma de volumen canónica de S^n vista en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces por Stokes (y usando el hecho que $\mathrm{d}\omega = (n+1)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$) tenemos que

$$\int_{S^n} i^*(f^*\omega) = \int_B \mathrm{d}(f^*\omega) = \int_B f^*(\mathrm{d}\omega) = \int_B (n+1)f^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}) = (n+1)\int_B \det(Df(x))\mathrm{d}x.$$

Como $i^*(f^*\omega) = (f \circ i)^*\omega$ y $f \circ i$ es justamente la restricción de f al borde, se sigue que la integral de $\det(Df)$ sólo depende del valor de f en el borde.

Por lo tanto, si $r : B \to S^n$ fuera una retracción suave, para todo x en la esfera tendríamos que $r(x) = x$. Por lo anterior, tendríamos que

$$\int_B \det(Dr(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_{S^n} (r \circ i)^*\omega = \frac{1}{n+1}\int_{S^n} \omega = \frac{\mathrm{Vol}(S^n)}{n+1} \neq 0.$$

Como $r(x) \in S^n$ para todo x, la norma es constante $||r(x)|| = 1$ y derivando la expresión $||r(x)||^2$ obtenemos que $Dr(x) \cdot r(x) = 0$ para todo x. Como $r(x) \neq 0$, eso implica que $Dr(x)$ no es inversible para ningún x y así $\det Dr(x) \equiv 0$, contradiciendo lo anterior.

Para concluir, si $f : B \to B$ no tiene ningún punto fijo, tomamos la función $r(x)$ que manda a cada x al punto de intersección de la esfera con la semi-recta que une $r(x)$ con x, y esa función sería una retracción suave. $\square$

4. Calcular la cohomología de de Rham de $S^1 \times S^2$ y dar generadores de cada grupo de cohomología.

Solución: Como $S^1 \times S^2$ es conexa, sabemos que $H^0_{dR}(S^1 \times S^2) = \mathbb{R}$. Además, sabemos que la integración nos da un isomorfismo entre $H^3_{dR}(S^1 \times S^2)$ y $\mathbb{R}$ donde una forma de volumen de $S^1 \times S^2$ genera el grupo de cohomología (por ser $S^1 \times S^2$ una variedad compacta, conexa y orientada y el ejercicio 21 c de la práctica 7). Ahora, vamos a usar Mayer-Vietoris con los abiertos $U = (S^1 \setminus \{p\}) \times S^2$ y $V = (S^1 \setminus \{q\}) \times S^2$ donde $p, q \in S^1$ son dos puntos distintos. Claramente, U y V son difeomorfos a $(0,1) \times S^2$ y $U \cap V$ es difeomorfo a la unión disjunta de dos copias de $(0,1) \times S^2$. Por el lema de Poincaré, podemos calcular la cohomología de U, V y $U \cap V$ y por Mayer-Vietoris obtenemos dos sucesiones exactas cortas

$$0 \to \overset{=\mathbb{R}}{H^0_{dR}(S^1 \times S^2)} \to \overset{=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V)} \to \overset{=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^0_{dR}(U \cap V)} \to H^1_{dR}(S^1 \times S^2) \to \overset{=0}{H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V)}$$

$$\overset{=0}{H^1_{dR}(U \cap V)} \to H^2_{dR}(S^1 \times S^2) \to \overset{=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^2_{dR}(U) \oplus H^2_{dR}(V)} \to \overset{=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^2_{dR}(U \cap V)} \to \overset{=\mathbb{R}}{H^3_{dR}(S^1 \times S^2)} \to \overset{=0}{H^3_{dR}(U) \oplus H^3_{dR}(V)}$$

y como la suma alternada de las dimensiones en una sucesión exacta es 0, obtenemos que

$$\dim H^1_{dR}(S^1 \times S^2) = \dim H^2_{dR}(S^1 \times S^2) = 1.$$

Para dar generadores, simplemente tomamos las proyecciones canónicas $\pi_1 : S^1 \times S^2 \to S^1$ y $\pi_2 : S^1 \times S^2 \to S^2$ y pullbackeamos las formas de volumen $\theta \in \Omega^1(S^1)$ y $\omega \in \Omega^2(S^2)$ para obtener formas

$$\pi_1^*(\theta) \in \Omega^1(S^1 \times S^2), \quad \pi_2^*(\omega) \in \Omega^2(S^1 \times S^2), \quad \text{y} \quad \pi_1^*(\theta) \wedge \pi_2^*(\omega) \in \Omega^3(S^1 \times S^2)$$

que son cerradas pero no exactas. En efecto, son cerradas porque el pullback conmuta con la diferencial exterior. Ahora bien, en general, si M y N son variedades orientables con formas de volumen ω_M y ω_N respectivamente, entonces $\pi_M^*\omega_M \wedge \pi_N^*\omega_N$ es una forma de volumen para $M \times N$ (donde π_M, π_N son las proyecciones canónicas). Para ver esto, simplemente escribimos localmente en coordenadas

$$\omega_M = f \mathrm{d}\phi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi^m \text{ y } \omega_N = g \mathrm{d}\psi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi^n$$

con f, g funciones que no se anulan y así

$$\pi_M^*\omega_M \wedge \pi_N^*\omega_N = fg \mathrm{d}\phi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi^m \wedge \mathrm{d}\psi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi^n.$$

Por lo tanto, $\pi_1^*(\theta) \wedge \pi_2^*(\omega)$ representa una clase de cohomología no trivial. Si $\pi_1^*(\theta)$ fuera exacta, entonces $\pi_1^*(\theta) \wedge \pi_2^*(\omega)$ lo sería (por el ejercicio 10 de la práctica 6 por ejemplo) y así $\pi_1^*(\theta)$ también representa una clase de cohomología no trivial. Ver que $\pi_2^*(\omega)$ no es exacta es análogo. $\square$

5. Probar que la distribución en $\mathbb{R}^4$ generada por

$$X = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w},$$

donde (x, y, z, w) son las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^4$, no admite variedades integrales de dimensión 2.

Solución: Calculemos el corchete de Lie $[X, Y]$. Para eso, tomemos una función f y calculemos

$$\begin{aligned}
[X, Y]f &= XYf - YXf \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial w}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} + x\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} \\
&\quad - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - y\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y} - yx\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z}$. Como los ganchos forman una base, es claro que $[X, Y]_p$ no puede estar en el subespacio de $T_p\mathbb{R}^4$ generado por X_p, Y_p (pues no tienen componente en los ganchos $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$) para ningún punto p. El teorema de Frobenius nos permite concluir que no puede haber ninguna variedad integral por ningún punto.

$\square$