Geometría Diferencial 2017

Soluciones del Recuperatorio del Primer Parcial - 06/07/17

1. En el toro $T = S^1 \times S^1$ consideremos una función $f : T \to T$ definida por

$$f(e^{\mathbf{i}\theta}, e^{\mathbf{i}\phi}) = (e^{\mathbf{i}(a\theta+b\phi)}, e^{\mathbf{i}(c\theta+d\phi)})$$

para a, b, c, d enteros (viendo a $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$). Probar que f está bien definida y que es una función suave. Probar que f es un difeomorfismo si $ad - bc = \pm 1$.

Solución: La buena definición es clara, pues si θ, θ' y ϕ, ϕ' difieren en múltiplos enteros de 2π, entonces $a\theta + b\phi$ y $a\theta' + b\phi'$ también por ser a, b enteros. Para ver que es suave, veamos que las funciones $S^1 \times S^1 \to S^1$ dadas por $(e^{\mathbf{i}\theta}, e^{\mathbf{i}\phi}) \mapsto e^{\mathbf{i}(a\theta+b\phi)}$ y $(e^{\mathbf{i}\theta}, e^{\mathbf{i}\phi}) \mapsto e^{\mathbf{i}(c\theta+d\phi)}$ son suaves. Como la función $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ dada por $(re^{\mathbf{i}\theta}, se^{\mathbf{i}\phi}) \mapsto rse^{\mathbf{i}(a\theta+b\psi)}$ es suave y S^1 es una subvariedad de $\mathbb{C}^\times$, la restricción resulta ser suave también.

Si $ad - bc = \pm 1$, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene por inversa a

$$\pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La función $g : T \to T$ dada por $g(e^{\mathbf{i}\theta}, e^{\mathbf{i}\phi}) = (e^{\mathbf{i}(\pm d\theta \mp b\phi)}, e^{\mathbf{i}(\mp c\theta \pm a\phi)})$ es claramente diferenciable por lo anterior y es sencillo verificar que es la inversa de f. $\square$

2. Sea $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la función dada por

$$f(x : y) = (x^n : x^{n-1}y : \cdots : xy^{n-1} : y^n).$$

a) Probar que f está bien definida y es un embedding.

b) Probar que no existe un embedding $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$.

Solución: La buena definición es clara pues si $(x : y) = (x' : y')$ entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $(x, y) = \lambda(x', y')$ y así

$$(x^n, x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1}, y^n) = \lambda^n(x'^n, x'^{n-1}y', \cdots, x'y'^{n-1}, y'^n).$$

Además, $(x^n, \cdots, y^n) = (0, 0, 0)$ si y sólo si $x = y = 0$. La función f es claramente suave pues vista como función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es suave y desciende al cociente. Como $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es compacto, para ver que f es un embedding basta ver que es una inmersión inyectiva. La inyectividad es fácil de verificar. Para ver que es una inmersión, simplemente calculemos la expresión en cartas. Si $U = \{(x : y) : y \neq 0\}$ y $V = \{(x_0 : \cdots : x_n) : x_n \neq 0\}$ entonces $f(U) \subseteq V$. Entonces, la expresión en coordenadas de f es

$$x \in U \mapsto (x : 1) \overset{f}{\mapsto} (x^n : x^{n-1} : \cdots : x : 1) \mapsto (x^n, \cdots, x) \in V.$$

La derivada de esta función es $(nx^{n-1}, \cdots, 1)$, que nunca puede anularse. Esto prueba que es una inmersión.

Como $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una variedad compacta de dimensión n, por el ejercicio 6 de la práctica 3, no puede haber un embedding en $\mathbb{R}^n$. $\square$

3. Consideremos el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$X = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

a) Hallar las curvas integrales del campo X que comienzan en $(0, a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

b) Resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = (x+y)f(x,y). \\ f(0,y) & = y \end{cases}$$

Solución: Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva integral que empieza en $\gamma(0) = (0, a)$. Es decir, queremos resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 + y(t)^2, \\ y'(t) = 2x(t)y(t), \\ x(0) = 0, y(0) = a. \end{cases}$$

Si llamamos $u(t) = x(t) + y(t)$, $v(t) = x(t) - y(t)$, sumando y restando las dos ecuaciones se sigue que

$$\begin{cases} u'(t) & = u(t)^2 \\ u(0) & = a, \end{cases} \quad \begin{cases} v'(t) & = v(t)^2 \\ v(0) & = -a. \end{cases}$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales, obtenemos que

$$u(t) = \frac{a}{1-at}, \quad v(t) = -\frac{a}{1+at}.$$

Como $x(t) = \frac{u(t)+v(t)}{2}$ y $y(t) = \frac{u(t)-v(t)}{2}$ se sigue que

$$x(t) = \frac{a^2 t}{1-a^2t^2}, \quad y(t) = \frac{a}{1-a^2t^2}$$

y así hemos encontrado las curvas integrales que comienzan en $(0, a)$.

Para resolver la ecuación diferencial, consideramos $\alpha(t) = f(x(t), y(t))$ donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es la curva integral que empieza en un cierto $(0, a)$. Entonces, por la regla de la cadena

$$\alpha'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = (x(t) + y(t))f(x(t), y(t)).$$

Reemplazando $x(t)+y(t) = \frac{a}{1-at}$ obtenemos que $\alpha(t)$ cumple la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \dfrac{a}{1-at}\alpha(t) \\ \alpha(0) = a. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\alpha(t) = \frac{a}{1-at}$ es la única solución de esta ecuación diferencial. Finalmente, dado un punto (x, y) cualquiera, miramos la curva integral γ que pasa por $\gamma(t_0) = (x, y)$ y comienza en un cierto $(0, a)$. En ese caso,

$$f(x,y) = \alpha(t_0) = \frac{a}{1-at_0} = x(t_0) + y(t_0) = x + y.$$

Así, la función $f(x, y) = x + y$ es la solución buscada. □

4. Probar que una función $f : M \to N$ diferenciable es una submersión si y sólo si para todo punto $p \in M$ existe un entorno abierto $U \subseteq N$ de $f(p)$ y una sección suave $\sigma : U \to M$ (es decir, $f \circ \sigma = \mathrm{id}$) tal que $\sigma(f(p)) = p$.

Solución: Si f es una submersión, dado $p \in M$, $q = f(p) \in N$, por la forma local de las submersiones podemos elegir cartas (U, ϕ) alrededor de $p \in M$ y (V, ψ) alrededor de $q \in N$ de modo que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y $\psi f \phi^{-1}(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots, x_n)$ sea una proyección. Tomando una sección $\widetilde{\sigma}$ de la proyección (por ejemplo, podríamos tomar la sección $\widetilde{\sigma}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$), la sección local σ de f será $\sigma = \phi \widetilde{\sigma} \psi^{-1}$.

Recíprocamente, si para cada punto $p \in M$ existe una sección σ con $\sigma(f(p)) = p$ entonces tomando diferencial a $f \circ \sigma = \mathrm{id}$ obtendremos que $\mathrm{d}_p f \circ \mathrm{d}\sigma_{f(p)} = \mathrm{id}$ que implica que $\mathrm{d}_p f$ es sobreyectiva. $\square$

5. Sea G un grupo de Lie conexo. Probar que si $f : G \to G$ es un morfismo inyectivo de grupos de Lie, entonces debe ser un isomorfismo.

Solución: Sabemos que un morfismo de grupos de Lie tiene rango constante. Por el teorema del rango constante, sabemos cómo es la forma local de f. De la forma local se desprende que f es una inmersión (pues de otro modo no podría ser inyectiva). Como f es una inmersión, $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo. Esto implica por el teorema de la función implícita que f es un difeomorfismo en un entorno de la identidad. Luego, f es abierta y así su imagen es un subgrupo abierto de G. Como G es conexo, todo subgrupo abierto también es cerrado y por lo tanto f también es sobreyectiva. Esto concluye la prueba. $\square$