Geometría Diferencial 2017

Soluciones del Primer Parcial - 11/05/17

1. Una "matraca" es un par (ordenado) de vectores unitarios (v, w) en el espacio $\mathbb{R}^3$ tales que v y w son ortogonales. Consideremos el espacio de configuraciones de matracas

$$M = \{(v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ : \ v, w \text{ ortogonales y unitarios}\}.$$

Probar que M tiene estructura de variedad diferenciable de forma natural y que con esa estructura es difeomorfo a $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Solución:

Notemos que $M = f^{-1}(0)$ donde $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la función dada por

$$f(v, w) = (||v||^2 - 1, ||w||^2 - 1, v \cdot w).$$

Es fácil verificar que

$$Df(v, w) = \begin{pmatrix} 2v & 0 \\ 0 & 2w \\ w & v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 6}$$

y así $Df(v, w)$ tiene rango 3 salvo que v y w sean paralelos. Ahora bien, si $(v, w) \in f^{-1}(0)$ tendríamos que $v \cdot w = 0$ y así v y w no pueden ser paralelos. Luego, esto implica que 0 es un valor regular de f y por lo tanto M es naturalmente una subvariedad de dimensión 3 de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Consideremos la función $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por

$$(v, w) \mapsto \begin{pmatrix} | & | & | \\ v & w & v \times w \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

donde $v \times w$ denota el producto vectorial. Claramente esta función se restringe y correstringe a una función $M \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ que biyectiva pues las columnas de toda matriz en $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ forman una base ortonormal orientada. Además, esta restricción resulta ser diferenciable pues $M \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es una subvariedad y $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ también lo es. La inversa de esta función consiste en tomar las primeras dos columnas de la matriz y por el mismo argumento resulta diferenciable. Esto concluye la solución. $\square$

2. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ la función dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, zx, yz).$$

a) Probar que f induce una función diferenciable $\widetilde{f} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$.

b) Probar que $\widetilde{f}$ es un embedding.

c) Probar que no existe un embedding $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$.

Solución:

Para el primer inciso, como $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/\{\pm 1\}$, simplemente debemos verificar que f es diferenciable y $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$. La diferenciabilidad se debe a que f es la restricción de una función diferenciable cuyo dominio es todo $\mathbb{R}^3$ a S^2 y la otra condición es una verificación sencilla.

Para el segundo inciso, bastará con probar que $\widetilde{f}$ es una inmersión pues $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es compacto. Como $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es un difeomorfismo local, bastará ver que f es una inmersión y a su vez, como $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es un embedding, bastará probar que $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$ tiene rango 2 en $T_pS^2 \subseteq T_p\mathbb{R}^3$ para cada $p = (x, y, z) \in S^2$. La diferencial es

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

y notemos que tiene como menores a

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

que tienen determinantes $2y(x^2+y^2)$ y $2x(x^2+y^2)$. Si $x, y \neq 0$, entonces $Df(x, y, z)$ tiene rango 3 y listo. Sólo queda chequear $(0, 0, \pm 1)$ pero esto es sencillo pues $(1, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}$, $(0, 1, 0) = \frac{\partial}{\partial y}$ es base del tangente de S^2 allí.

Sólo resta ver la inyectividad de $\widetilde{f}$. Si escribimos

$$x^2 - y^2 = a, \quad xy = b, \quad xz = c, \quad yz = d,$$

se sigue fácilmente que

$$x^2 d = bc, \quad y^2 c = bd, \quad z^2 b = cd.$$

Si todos los b, c, d son iguales a 0, al menos dos de x, y, z deben ser 0 y así la condición $x^2+y^2+z^2 = 1$ implica que el restante es ± 1. Si alguno de b, c, d es no nulo, las igualdades $x^2 d = bc, y^2 c = bd, z^2 b = cd$ junto a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ determinarán x^2, y^2 y z^2. Es fácil ver de las ecuaciones originales que la elección de signo de alguno de x, y, z implica el mismo signo para los restantes y listo.

Finalmente, por el ejercicio 6 de la práctica 3, no puede haber un embedding de una variedad compacta de dimensión 2 en $\mathbb{R}^2$. $\square$

3. Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro. Probar que

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

define un campo tangente sobre C. Hallar la curva integral que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

Solución:

Como $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una subvariedad definida por $x^2 + y^2 = 1$, si $(x_0, y_0, z_0) \in C$ sabemos que $T_{(x,y,z)}C$ se identifica con los vectores tangentes

$$a\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} + b\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} + c\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

tales que $ax_0 + by_0 = 0$. Ahora bien, como $y_0x_0 + (-x_0)y_0 = 0$ para cada $(x_0, y_0, z_0) \in C$, el campo $X : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ en realidad se restringe a una función $X : C \to TC$, que debe ser diferenciable pues $TC \subseteq T\mathbb{R}^3$ es una subvariedad. Esto prueba que X es un campo sobre C como queríamos.

Para calcular la curva integral por $(1, 0, 0)$, debemos resolver la ecuación diferencial $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, $\gamma(0) = (1, 0, 0)$. Más explícitamente, si escribimos $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 1 \end{cases} \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0).$$

Para resolver la última ecuación, $z'(t) = 1$ implica que $z(t) = t + c$ con c constante y la condición inicial $z(0) = 0$ nos dice que $z(t) = t$. La ecuación $x'(t) = -y(t)$ después de derivar se convierte en

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

La única solución de este problema de valores iniciales es $x(t) = \cos(t)$. De modo similar, vemos que $y(t) = \sin(t)$. Por lo tanto, la curva integral que buscamos es

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

es decir, una hélice. $\square$

4. Supongamos que M es una variedad diferenciable conexa y $p, q \in M$ son dos puntos distintos. Probar que existe un difeomorfismo $f : M \to M$ tal que $f(p) = q$.

   Sugerencia: Probar que para todo $p \in M$, el conjunto

$$S_p = \{q \in M \ : \ \exists f : M \to M \text{ difeomorfismo tal que } f(p) = q\}$$

   es abierto y cerrado.

Solución:

Probemos que S_p es abierto para cualquier $p \in M$. Notemos que existe un entorno U de p tal que para cada $q \in U$ existe un camino $\gamma : [0,1] \to M$ suave y regular tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. En efecto, tomemos una carta de p con $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = B_1(0)$ y definimos $\gamma(t) = \phi^{-1}(t\phi(q))$. Como γ es un embedding, podemos considerar el pushforward del campo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ sobre la imagen de γ. Extendamos este campo a un campo X en todo M con soporte compacto. Como todo campo con soporte compacto es completo, el flujo de X está definido a todo tiempo. Luego, el flujo $\Phi_X(1, \cdot) : M \to M$ de X a tiempo 1 es un difeomorfismo de M tal que $\Phi_X(1, p) = q$ pues γ es la curva integral de X por p por definición.

Para ver que S_p es cerrado, probemos que su complemento es abierto. Sea $q \notin S_p$. Como S_q es abierto, existe un entorno abierto $U \ni q$ con $U \subseteq S_q$. Si $q' \in U$ es tal que $q' \in S_p$ entonces existe $f : M \to M$ tal que $f(p) = q'$. Pero como $q' \in S_q$ existe $g : M \to M$ tal que $g(q') = q$ y así $gf : M \to M$ es un difeomorfismo con $gf(p) = q$. Esto contradice el hecho que $q \notin S_p$. Por lo tanto $U \subseteq M \smallsetminus S_p$, y así S_p es cerrado. Como S_p es abierto, cerrado y no vacío y M es conexo, debemos tener que $S_p = M$. Como queríamos probar. $\square$

5. Sean G, H grupos de Lie y $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Supongamos que $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un epimorfismo de álgebras de Lie. Probar que si H es conexo entonces f es un epimorfismo.

   Sugerencia: Probar que f es una submersión.

   Solución:

   Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es el espacio tangente en la identidad T_1G. Además, notemos que si $L_h : G \to G$ es el morfismo de multiplicación a izquierda por $h \in G$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo para cada $g \in G$:

$$\begin{tikzcd}
T_gG \arrow[r, "\mathrm{d}_g L_{g^{-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{d}_g f"'] & T_1G = \mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{d}_1 f = f_*"] \\
T_{f(g)}H \arrow[r, "\mathrm{d}_{f(g)} L_{f(g^{-1})}"'] & T_1H = \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

   En efecto, el diagrama conmuta por la regla de la cadena y la siguiente igualdad:

$$(L_{f(g^{-1})} \circ f)(x) = f(g^{-1})f(x) = f(g^{-1}x) = f(L_{g^{-1}}(x)) = (f \circ L_{g^{-1}})(x).$$

   Esto implica que $\mathrm{d}_g f : T_gG \to T_{f(g)}H$ es un epimorfismo de espacios vectoriales para cada $g \in G$ pues la multiplicación a izquierda es un difeomorfismo y así induce un isomorfismo entre los espacios tangentes. Luego $f : G \to H$ es una submersión y en consecuencia f es una aplicación abierta.

   Ahora bien, como f es abierta se sigue que $f(G) \subseteq H$ es un subgrupo abierto. Para cada $h \in H$, la coclase $hf(G) = L_h(f(G))$ es abierta pues $L_h : H \to H$ es un difeomorfismo. Como H es la unión disjunta de las coclases, tenemos que

$$f(G) = H \smallsetminus \bigsqcup_{h \in H \smallsetminus f(G)} hf(G)$$

   y por lo tanto la imagen es cerrada. Como la imagen de f es abierta, cerrada y no vacía y H es conexo, f debe ser sobreyectiva. Y estamos. $\square$