Geometría Diferencial 2017

Segundo Parcial – 29/06/17

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Consideremos la *forma de contacto*

$$\omega = \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{d}x_i$$

en $\mathbb{R}^{2n+1}$ con coordenadas $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, z)$. Hallar todos los campos tangentes $R \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+1})$ tales que

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega(R, -) & \equiv 0 \\ \omega(R) & \equiv 1. \end{cases}$$

Un tal campo R se denomina un *campo de Reeb*.

2. Sea M una variedad compacta y conexa de dimensión n y $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo tangente, entonces existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $L_X\omega = f\omega$ llamada la *divergencia* $\operatorname{div} X$ de X. Probar que para todo campo X existe algún punto $p \in M$ tal que $\operatorname{div} X(p) = 0$.

3. Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| \leq 1\}$ la bola unitaria y sea $f : B \to B$ una función suave.

   a) Probar que
   $$\int_B \det(Df(x_1, \cdots, x_{n+1}))\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}$$
   depende solamente del valor de f en S^n.

   b) Probar que no existe una retracción suave $r : B \to \partial B = S^n$.

   c) Concluir que toda función $f : B \to B$ suave tiene un punto fijo.

4. Calcular la cohomología de de Rham de $S^1 \times S^2$ y dar generadores de cada grupo de cohomología.

5. Probar que la distribución en $\mathbb{R}^4$ generada por

$$X = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w},$$

donde (x, y, z, w) son las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^4$, no admite variedades integrales de dimensión 2.