Geometría Diferencial 2017

Recuperatorio del Primer Parcial – 06/07/17

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. En el toro $T = S^1 \times S^1$ consideremos una función $f : T \to T$ definida por
$$f(e^{\mathbf{i}\theta}, e^{\mathbf{i}\phi}) = (e^{\mathbf{i}(a\theta+b\phi)}, e^{\mathbf{i}(c\theta+d\phi)})$$
para a, b, c, d enteros (viendo a $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$). Probar que f está bien definida y que es una función suave. Probar que f es un difeomorfismo si $ad - bc = \pm 1$.

2. Sea $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la función dada por
$$f(x : y) = (x^n : x^{n-1}y : \cdots : xy^{n-1} : y^n).$$
   a) Probar que f está bien definida y es un embedding.
   b) Probar que no existe un embedding $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$.

3. Consideremos el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dado por
$$X = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}.$$
   a) Hallar las curvas integrales del campo X que comienzan en $(0, a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
   b) Resolver la ecuación diferencial
$$\begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = (x+y)f(x,y). \\ f(0,y) & = y \end{cases}$$

4. Probar que una función $f : M \to N$ diferenciable es una submersión si y sólo si para todo punto $p \in M$ existe un entorno abierto $U \subseteq N$ de $f(p)$ y una sección suave $\sigma : U \to M$ (es decir, $f \circ \sigma = \mathrm{id}$) tal que $\sigma(f(p)) = p$.

5. Sea G un grupo de Lie conexo. Probar que si $f : G \to G$ es un morfismo inyectivo de grupos de Lie, entonces debe ser un isomorfismo.