Geometría Diferencial 2017

Primer Parcial - 11/05/17

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Una "matraca" es un par (ordenado) de vectores unitarios (v, w) en el espacio $\mathbb{R}^3$ tales que v y w son ortogonales. Consideremos el espacio de configuraciones de matracas
$$M = \{(v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ : \ v, w \text{ ortogonales y unitarios}\}.$$
Probar que M tiene estructura de variedad diferenciable de forma natural y que con esa estructura es difeomorfo a $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ la función dada por
$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, zx, yz).$$
   a) Probar que f induce una función diferenciable $\widetilde{f} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$.
   b) Probar que $\widetilde{f}$ es un embedding.
   c) Probar que no existe un embedding $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$.

3. Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro. Probar que
$$-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$
define un campo tangente sobre C. Hallar la curva integral que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

4. Supongamos que M es una variedad diferenciable conexa y $p, q \in M$ son dos puntos distintos. Probar que existe un difeomorfismo $f : M \to M$ tal que $f(p) = q$.
Sugerencia: Probar que para todo $p \in M$, el conjunto
$$S_p = \{q \in M \ : \ \exists f : M \to M \text{ difeomorfismo tal que } f(p) = q\}$$
es abierto y cerrado.

5. Sean G, H grupos de Lie y $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Supongamos que $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un epimorfismo de álgebras de Lie. Probar que si H es conexo entonces f es un epimorfismo.
Sugerencia: Probar que f es una submersión.