GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 8: TEOREMA DE FROBENIUS

Sea M una variedad de dimensión n. Notamos $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$. Con el producto exterior de formas, $\Omega^*(M)$ tiene la estructura de una $\mathbb{R}$-álgebra graduada. Diremos que un ideal $I \subseteq \Omega^*(M)$ es un *ideal diferencial* si I es homogéneo y $\mathrm{d}I \subseteq I$. Un ideal $I \subseteq \Omega^*(M)$ es *localmente de rango r* (también conocido como sistema de Pfaff) si para cada punto $p \in M$ existe un abierto U y 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_r$ linealmente independientes de modo que $I|_U = \langle \omega_1, \cdots, \omega_r \rangle$.

1 Sea D una distribución de dimensión k en una variedad M de dimensión n. Consideremos $I(D) = \{\omega \in \Omega^*(M) : \omega|_D = 0\}$ el anulador de D.

- **a.** Probar que $I(D)$ es un ideal de $\Omega^*(M)$.
- **b.** Probar que $I(D)$ es localmente de rango $n - k$.
- **c.** Recíprocamente si $I \subseteq \Omega^*(M)$ es un ideal localmente de rango $n - k$, entonces existe una única distribución D de dimensión k tal que $I = I(D)$.
- **d.** Probar que D es involutiva si y sólo si $I(D)$ es un ideal diferencial.

2 Sean $X^1, \dots, X^r$ campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes en todo punto de un abierto U,

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Sea D la distribucion en U generada por estos campos. Escribir explicitamente una base de las formas que anulan D.
Sugerencia: Considerar los menores maximales de la matriz (a_{ij}). Es interesante el caso $r = n - 1$ (generaliza el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$).

3 Sea M una variedad de dimensión n y sea I un ideal de formas diferenciables en M localmente de rango r. Probar que son equivalentes:

- **a.** I es un ideal diferencial.
- **b.** Si $\omega_1, \dots, \omega_r$ son generadores de I en un abierto $U \subseteq M$, entonces existen formas $\omega_{ij} \in \Omega^1(M)$ tales que
$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_{j=1}^{r} \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$
- **c.** Si $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$, entonces existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $\mathrm{d}\omega = \alpha \wedge \omega$.

4 Sea D una distribución de dimensión k sobre una variedad M de dimensión n. Sean $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ son generadores de $I(D)$ en un abierto $U \subseteq M$. Probar que D es involutiva en U si y sólo si la siguiente identidad

$$\mathrm{d}\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k} = 0$$

es válida para $i = 1, \dots, n - k$.

5 Si D es una distribución (no necesariamente involutiva) en una variedad M, diremos que un campo X es *característico* de D si $X \in D$ y para todo $Y \in D$ se tiene que $[X,Y] \in D$. Probar que X es un campo característico de D si y sólo si para toda 1-forma $\omega \in I(D)$ se tiene que $\iota_X(\omega) = 0$ y $\iota_X(\mathrm{d}\omega) \in I(D)$ donde $\iota_X(-)$ es el operador de contracción contra el campo X.

6 Dada una distribución D de dimensión k en una variedad M de dimensión n. Se define para cada punto $p \in M$ el subespacio $\Delta_p \subseteq T_pM$ generado por los campos característicos de D. Supongamos que $\dim \Delta_p = \ell$ es constante para todo $p \in M$.

- **a.** Probar que Δ es una distribución involutiva (una subvariedad integral maximal de Δ se llama *variedad característica* de D).
- **b.** Sea $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ una carta adaptada a Δ. Probar que en esa carta, todo $\omega \in I(D)$ se escribe como
$$\sum_{i=\ell+1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i$$
y que Δ es maximal con esta propiedad.

7 Sea ω una 1-forma nunca nula en una variedad M. Una función suave y nunca nula μ definida en un entorno $U \subseteq M$ se dice *factor integrante* para ω, si $\mu\omega$ es exacta en U. Pruebe que ω admite un factor integrante en un entorno de cada punto si y solo si $d\omega \wedge \omega = 0$. Concluir que si $\dim M = 2$ entonces toda 1-forma nunca nula admite un factor integrante en un entorno de cada punto.

8 Sea $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Analizar cuándo ω admite un factor integrante y cuándo el ideal generado por ω es un ideal diferencial.

9 Consideremos la 1-forma (llamada *forma de contacto*) en $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega = \mathrm{d}y - z\,\mathrm{d}x$. Determinar las variedades integrales *analíticas* de ω.
Sugerencia: cada curva paramétrica $y = y(x)$ (gráfico de función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) da la curva integral $(x, y(x), y'(x))$. Estas son todas las curvas integrales, junto con las rectas paralelas al eje z. No existen superficies integrales.

10 Sea D una distribución involutiva de dimensión k sobre M y sea $i : P \hookrightarrow M$ una subvariedad integral de D. Supongamos que se tiene una función diferenciable $f : N \to M$ que se factoriza a través de P. Probar que la única función $g : N \to P$ tal que $i \circ g = f$ es necesariamente diferenciable.

11 Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Probar que existe una correspondencia biyectiva entre

- Subálgebras de Lie: es decir, subespacios vectoriales $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ cerrados por corchete.
- Subvariedades regulares $i : S \hookrightarrow G$ conexas tales que $i(S) \subseteq G$ es un subgrupo.

12 Probar que el gráfico de una función diferenciable $f : M \to N$ es variedad integral del ideal de formas $I \subseteq \Omega^*(M \times N)$ generado por
$$\{\pi_M^* f^*\omega - \pi_N^*\omega \;:\; \omega \in \Omega^1(N)\}.$$

13 Sea $\Omega = (\omega_{ij}) \in \mathrm{Mat}_r(\Omega^1(M))$ una matriz cuadrada de 1-formas de $r \times r$. Sea $p \in M$ un punto. Probar que existe una matriz de 1-formas en un entorno $U \subseteq M$ de p de modo que $A_p = I$ y
$$\Omega = (\mathrm{d}A)A^{-1}$$
si y sólo si $\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Omega$ (donde $(\Omega \wedge \Omega)_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$).

14 (Pfaff) Sea ω una 1-forma en M de modo que $\omega \wedge (\mathrm{d}\omega)^r \neq 0$ y $(\mathrm{d}\omega)^{r+1} = 0$ en algún abierto de M. Probar que existe una carta (U, ϕ) adentro de ese abierto de modo que

$$\omega = \mathrm{d}\phi^1 + \phi^2 \,\mathrm{d}\phi^3 + \cdots + \phi^{2r} \,\mathrm{d}\phi^{2r+1}.$$

15 (Darboux) Sea (M, ω) una variedad simpléctica (es decir, ω es una 2-forma cerrada y no degenerada en M) de dimensión $2n$. Probar que para cada punto existe una carta (U, ϕ) alrededor de ese punto de modo que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\phi^i \wedge \mathrm{d}\phi^{n+i}.$$