GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 7: INTEGRACIÓN Y COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

1 Supongamos que M y N son variedades orientadas de dimensión n y ω, η son n-formas de soporte compacto en M. Probar que:

a. (Linealidad) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces
$$\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta.$$

b. (Orientación) Si $-M$ denota a M con la orientación opuesta, entonces
$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

c. (Positividad) Si ω es una n-forma nunca nula orientada positivamente entonces
$$\int_M \omega \geq 0$$
con igualdad si y sólo si $\omega = 0$.

d. (Invarianza por difeomorfismos) Si $f : N \to M$ es un difeomorfismo entonces
$$\int_M \omega = \pm \int_N f^*\omega$$
donde el signo depende de si f preserva la orientación o no.

2 Sea C una curva suave en una variedad M, parametrizada por $\gamma : [a, b] \to M$. Si ω es una 1-forma en M, definimos la *integral de línea* de ω a lo largo de C por
$$\int_C \omega := \int_{[a,b]} \gamma^*\omega.$$

a. Probar que la definición no depende de la parametrización elegida: es decir, si $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to M$ es una *reparametrización* $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ (donde $\phi : [c, d] \to [a, b]$ es un difeomorfismo que preserva orientación) entonces $\int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_{[c,d]} \widetilde{\gamma}^*\omega$.

b. Si $\omega = \mathrm{d}f$ con $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave y la curva C recorre del punto p al punto q, entonces
$$\int_C \omega = f(q) - f(p).$$
En particular, la integral es independiente de la curva elegida.

3 (Integración sobre parametrizaciones) Sea M una variedad orientada de dimensión n y ω una n-forma de soporte compacto en M. Supongamos que $D_1, \ldots, D_k$ son abiertos acotados de $\mathbb{R}^n$ cuyos bordes tienen medida (Lebesgue) nula y que existen funciones $\Phi_i : \overline{D_i} \to M$ que verifican que

- Φ_i se restringe a un difeomorfismo que preserva orientación entre D_i y un abierto $W_i \subseteq M$.
- $W_i \cap W_j = \varnothing$ para todos $i \neq j$.
- $\mathrm{Supp}(\omega) := \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}} \subseteq \overline{W_1} \cup \cdots \cup \overline{W_k}$.

Probar que
$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} \Phi_i^*\omega.$$

4
- **a.** Recordemos que si $\omega = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$, entonces $i^*\omega$ es una forma de volumen en S^2 donde $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión. Calcular $\int_{S^2} i^*\omega$ usando el ejercicio anterior y también usando el teorema de Stokes.
- **b.** Más generalmente, consideremos la $n-1$-forma ω en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

y $i^*\omega$ la forma de volumen estándar en S^{n-1}. Calcular $\int_{S^{n-1}} i^*\omega$.

5 Sea M una variedad compacta sin borde y de dimensión n. Probar que si $\int_M \omega \neq 0$ entonces ω no es exacta. Concluir que una n-forma nunca nula no es exacta.

6
- **a.** Probar que $\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ es cerrada pero no exacta.
- **b.** Más generalmente, probar que la $n-1$-forma ω en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

es cerrada pero no exacta.

7 Sea M una variedad diferencial y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada.
- **a.** Si $S \subseteq M$ es una subvariedad compacta y orientada de dimensión k de modo tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad $W \subseteq M$, entonces $\int_S \omega = 0$.
- **b.** Supongamos que W es una subvariedad de dimensión $k+1$ tal que el borde es la unión disjunta $\partial W = S \cup T$ de dos subvariedades S y T dimensión k orientadas. Probar que $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

8 Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientable de dimensión n. Probar que existe una forma de volumen canónica $d\mathrm{Vol}_g$, dada localmente en coordenadas de una carta (U, ϕ) por

$$\sqrt{\det(g_{ij}(p))}\, d\phi^1 \wedge \cdots \wedge d\phi^n$$

donde $g_{ij}(p) = g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial \phi_j}\right|_p \right)$. Si M es además compacta, se define su volumen como

$$\mathrm{Vol}_g(M) = \int_M d\mathrm{Vol}_g.$$

- **a.** Calcular el volumen de la esfera S^n con la métrica Riemanniana inducida por la inclusión canónica $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.
- **b.** Calcular la forma de volumen de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con la métrica Riemanniana inducida en términos de una parametrización $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$. Probar que si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces

$$\int_S f := \int_S f \, d\mathrm{Vol}_g$$

coincide con la integral de superficie de f sobre S como en Análisis II.

* **9** Consideremos $\mathbb{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ la bola unitaria con el tensor métrico

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Esto se llama el *modelo del disco de Poincaré* de la geometría hiperbólica.

a. Probar que la distancia geodésica

$$\mathrm{dist}_g(p,q) = \inf\{\mathrm{Long}_\gamma : \gamma : [0,1] \to \mathbb{B}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

verifica que $\mathrm{dist}_g(0,(x,y)) \leq \tanh^{-1}(\|(x,y)\|)$.

b. Probar que la bola $B_r^g(0) = \{(x,y) \in \mathbb{B} : \mathrm{dist}_g(0,(x,y)) < r\}$ contiene a la bola euclídea $B_{\tanh(r)}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{B} : \|(x,y)\| < \tanh(r)\}$.

c. Calcular el volumen hiperbólico de la bola euclídea $\mathrm{Vol}_g(B_r(0))$.

d. Concluir que $\mathrm{Vol}_g(\overline{B}_r^g(0)) \geq \pi\cosh^2(r) > \pi r^2$. Concluir que $\mathbb{B}$ con la métrica hiperbólica es un espacio *curvado* (es decir, no existe ningún difeomorfismo local $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^2$ tal que la diferencial $\mathrm{d}_p\phi : (T_p\mathbb{B}, g_p) \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ es una isometría de espacios normados donde $\mathbb{R}^2$ tiene el producto interno usual).

10 **a.** Supongamos que M,N son dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $\omega \in \Omega^m(M), \eta \in \Omega^n(N)$, probar que

$$\int_{M\times N} \pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta) = \left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right).$$

b. (Principio de Cavalieri) Sea $\pi : M \to N$ una submersión y ω_M, ω_N formas de volumen en M y N respectivamente. Supongamos que existe una forma η que "complementa" a $\pi^*\omega_N$, es decir, $\omega_M = \eta \wedge \pi^*\omega_N$. Probar que para toda función $f : M \to \mathbb{R}$ suave de soporte compacto, integrando sobre las fibras $M_q = \pi^{-1}(q)$ se tiene que

$$\int_M f\omega_M = \int_N \left(\int_{M_q} f(x)\, i^*\eta(x)\right)\omega_N(q).$$

11 Sea G un grupo de Lie.

a. Probar que existe una n-forma nunca nula invariante a izquierda sobre G, es decir, si $L_g : G \to G$ denota la multiplicación a izquierda, tenemos que $L_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. Le daremos a G la orientación inducida por esta forma. Si G es compacto, la normalizaremos de modo que además cumpla $\int_G \omega = 1$.

b. Dada una función $f : G \to \mathbb{R}$ suave de soporte compacto en G, definimos su integral como $\int_G f(g)\,\mathrm{d}g := \int_G f\omega$. Probar que la integral es invariante a izquierda, es decir

$$\int_G f = \int_G f \circ L_g$$

para todo $g \in G$.

c. Si $R_g : G \to G$ es la multiplicación a derecha por $g \in G$, probar que $R_g^*\omega$ también es una forma invariante a izquierda y concluir que existe una constante $\widetilde{\lambda}(g)$ de modo que $R_g^*\omega = \widetilde{\lambda}(g)\omega$. Si definimos $\lambda(g) = \left|\widetilde{\lambda}(g)\right|$, probar que $\lambda : G \to \mathbb{R}_{>0}$ es un morfismo de grupos de Lie. Este morfismo se denomina la *función modular*.

d. Probar que la integral es invariante a derecha si y sólo si la función modular es constantemente 1. En ese caso diremos que G es *unimodular*.

e. Probar que si G es compacto entonces es unimodular.

Comentario: La existencia de una forma de volumen invariante a izquierda en un grupo de Lie permite definir una *medida de Haar*, es decir, una medida invariante a izquierda.

* **12** **a.** Sean G_1, G_2 son grupos de Lie con formas invariantes a izquierda ω_1, ω_2 respectivamente. Probar que $\omega = \pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2$ es una forma invariante a izquierda en $G = G_1 \times G_2$ donde $\pi_i : G \to G_i$ es la proyección canónica. Probar que si G_1 y G_2 son unimodulares, entonces G lo es.

b. Probar que

$$\omega_g = \frac{1}{\det(g)^n} \prod_{i,j} \mathrm{d}E_{ij}$$

es una forma invariante a izquierda en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Probar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es unimodular.

c. Probar que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, y > 0 \right\}$$

con la forma invariante a izquierda $\omega = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ no es unimodular.

* **13** Sea G un grupo de Lie compacto. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación real de dimensión finita, probar que existe un producto interno en V de modo que ρ es ortogonal para este producto interno.
Sugerencia: Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno arbitrario en V, considere

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle = \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle \,\mathrm{d}g$$

y pruebe que $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ es un producto interno y $\langle\!\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle\!\rangle = \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle$ para todo $g \in G$.

* **14** (Maschke) Diremos que una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es *irreducible* si no hay ningún subespacio $W \subseteq V$ de modo que $\rho(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Diremos que una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es *semisimple* si podemos expresarla como una suma directa de representaciones irreducibles. Probar que toda representación de dimensión finita de un grupo de Lie compacto es semisimple.

15 Probar los lemas de Poincaré:

a. Diremos que un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es *estrellado* respecto del origen si para todo punto $x \in U$, el segmento que une 0 con x está contenido en U. Supongamos que U es estrellado respecto del origen y sea $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \,\mathrm{d}x_i$ una 1-forma cerrada. Probar que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \omega_i(tx)\,\mathrm{d}t$$

cumple que $\mathrm{d}f = \omega$. En otras palabras, $H^1(U) = 0$ si U es estrellado respecto de 0.

b. Más generalmente, si ω es una p-forma cerrada en U,

$$\omega = \sum_{I=(1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)} \omega_I \,\mathrm{d}x_I$$

entonces

$$\eta = \sum_{I=(1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{p-1} \omega_I(tx)\,\mathrm{d}t \right) x^{i_j} \,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

es una $(p-1)$-forma en U que verifica $\mathrm{d}\eta = \omega$. Concluir que $H^p(U) = 0$ para todo $p \ge 1$ si U es un abierto estrellado respecto del origen.

16 (Mayer-Vietoris) Sean M una variedad y $U, V \subseteq M$ abiertos tales que $U \cup V = M$. Probar que tenemos una sucesión exacta de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^\bullet(M) & \longrightarrow & \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) & \longrightarrow & \Omega^\bullet(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\omega, \tau) & \longmapsto & \tau - \omega & & \end{array}$$

y por lo tanto induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{k+1}(M) \longrightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \longrightarrow H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Calcular el "morfismo de borde", es decir, el morfismo $H^k(U \cap V) \to H^{k+1}(M)$.

17 Hallar la cohomología de los siguientes espacios, y en cada caso dar una base.

a. Las esferas S^n.
b. El complemento de un conjunto finito de puntos $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$.
c. El toro $T = S^1 \times S^1$. El toro con g manijas.
d. La banda de Mobius abierta y la botella de Klein.

18 Probar que el toro con g manijas no es difeomorfo a la esfera.

19 Sea $f : S^3 \to S^2$ una función suave y $\omega \in \Omega^2(S^2)$ una 2-forma de volumen normalizada para que $\int_{S^2} \omega = 1$.

a. Probar que existe una 1-forma $\eta \in \Omega^1(S^3)$ tal que $\mathrm{d}\eta = f^*\omega$.
b. Sea η como en el inciso anterior. Probar que

$$H(f) = \int_{S^3} \eta \wedge \mathrm{d}\eta$$

no depende de la elección de ω y η. Este número es el *invariante de Hopf* de f.
c. Probar que si f, g son funciones homotópicas, entonces $H(f) = H(g)$.
Comentario: El invariante de Hopf permite calcular $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

* **20** (Cohomología con soporte compacto) Sea M una variedad de dimensión n. Diremos que una k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ tiene *soporte compacto* si $\mathrm{Supp}(\omega) := \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}$ es compacto en M. Denotamos $\Omega^k_c(M)$ al conjunto de k-formas con soporte compacto.

a. Probar que si ω tiene soporte compacto, entonces $\mathrm{d}\omega$ también. Por lo tanto, tenemos un complejo de formas con soporte compacto

$$0 \longrightarrow \Omega^0_c(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_c(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_c(M) \longrightarrow 0.$$

La *cohomología con soporte compacto* $H^k_c(M)$ es el k-ésimo grupo de cohomología de este complejo.
b. Probar que si $U \subseteq M$ es abierto, entonces $i_! : \Omega^k_c(U) \to \Omega^k_c(M)$ dado por la extensión por 0 fuera de U cumple que $\mathrm{d}(i_!\omega) = i_!(\mathrm{d}\omega)$ y así induce un morfismo $i_! : H^k_c(U) \to H^k_c(M)$ en cohomología con soporte compacto.
c. Probar que si $f : M \to N$ es una función propia, entonces induce un morfismo en cohomología con soporte compacto $f^* : H^k_c(N) \to H^k_c(M)$ via el pullback usual.
d. Probar que si $U, V \subseteq M$ son abiertos con $M = U \cup V$, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^\bullet_c(U \cap V) & \longrightarrow & \Omega^\bullet_c(U) \oplus \Omega^\bullet_c(V) & \longrightarrow & \Omega^\bullet_c(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \omega & \longmapsto & (-i_!\omega, i_!\omega) & & & & \end{array}$$

y por lo tanto induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow H_c^k(U\cap V) \longrightarrow H_c^k(U)\oplus H^k(V) \longrightarrow H_c^k(M) \longrightarrow H_c^{k+1}(U\cap V) \longrightarrow H_c^{k+1}(U)\oplus H_c^{k+1}(V) \longrightarrow H_c^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Calcular el "morfismo de borde", es decir, el morfismo $H_c^k(M) \to H_c^{k+1}(U\cap V)$.

21 **a.** Probar que $H_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$ y más precisamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdot : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

es un isomorfismo.

b. Probar que si M es una variedad conexa y orientada de dimensión n, entonces

$$\int_M \cdot : H_c^n(M) \to \mathbb{R},\ [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

es un isomorfismo.
Sugerencia: Proceda por inducción. El inciso anterior es el caso local.

c. Concluir que si M es una variedad compacta, conexa y orientada de dimensión n, entonces

$$\int_M \cdot : H^n(M) \to \mathbb{R},\ [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

es un isomorfismo.

22 Sean M, N variedades compactas, conexas y orientadas de dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

a. Probar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_M f^*\omega = k\int_N \omega$$

para toda n-forma $\omega \in \Omega^n(N)$. El número k, denotado $\deg(f)$, es el *grado* de la función f.

b. Probar que k es entero. Más precisamente, probar que si $q \in N$ es un valor regular de f, entonces

$$\deg(f) = \sum_{x\in f^{-1}(q)} \operatorname{sign}_f(x)$$

donde $\operatorname{sign}_f(x)$ vale 1 si f preserva orientación en x y -1 si no.

c. Probar que si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables entre variedades compactas, conexas y orientables, entonces $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.

d. Probar que si f, g son funciones homotópicas, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

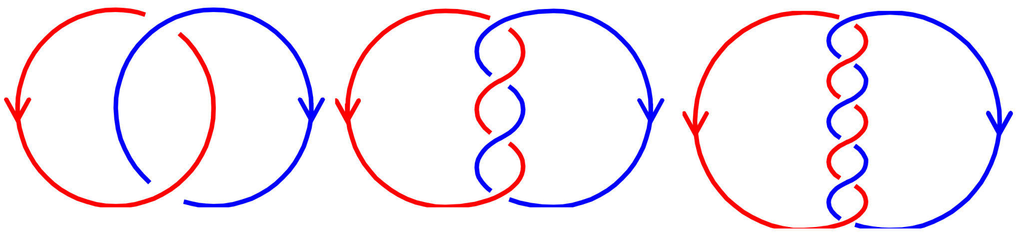
* **e.** Adaptar la definición de grado para el caso en que M, N no sean compactas, pero f es propia.
Sugerencia: considerar la cohomología de soporte compacto.

* **23** Un *nudo* es un embedding $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$. Supongamos que γ_1, γ_2 son dos nudos disjuntos (es decir, $\operatorname{im}\gamma_1 \cap \operatorname{im}\gamma_2 = \varnothing$). Sea $F_{\gamma_1,\gamma_2} : T = S^1 \times S^1 \to S^2$ la función dada por

$$F_{\gamma_1,\gamma_2}(s,t) = \frac{\gamma_2(t) - \gamma_1(s)}{\|\gamma_2(t) - \gamma_1(s)\|}$$

(donde $s, t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Definimos el *número de ligazón* de γ_1 y γ_2 como

$$\operatorname{Lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \deg(F_{\gamma_1,\gamma_2}).$$



Tres ejemplos de nudos con números de ligazón 1, 2 y 3 respectivamente.

a. Sea $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ la forma de volumen canónica en S^2. Probar que
$$\mathrm{Lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi}\int_T F^*_{\gamma_1,\gamma_2}\omega.$$
b. Probar que el número de ligazón es invariante por homotopías.
c. Probar que
$$\mathrm{Lk}(\gamma_1,\gamma_2) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{\det[\gamma_2(t)-\gamma_1(s)|\gamma_1'(s)|\gamma_2'(t)]}{\|\gamma_2(t)-\gamma_1(s)\|^3}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

24 Sea M una variedad de dimensión n y G un grupo finito actuando de forma propiamente discontinua sobre M. Notemos que G actúa sobre $\Omega^k(M)$, via $g\cdot\omega := (L_{g^{-1}})^*\omega$ y sea
$$\Omega^k(M)^G = \{\omega \in \Omega^k(M) : g\cdot\omega = \omega\ \forall g \in G\}$$
el conjunto de formas G-invariantes.

a. Probar que si $\omega \in \Omega^k(M)^G$ entonces $\mathrm{d}\omega \in \Omega^k(M)^G$, así que tenemos un *complejo de formas G-invariantes*
$$0 \longrightarrow \Omega^0(M)^G \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M)^G \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M)^G \longrightarrow 0.$$
Concluir que la acción de G desciende a una acción en $H^k(M)$ via $g\cdot[\omega] = [g\cdot\omega]$.
b. Probar que $\pi : M \to M/G$ es la proyección canónica, $\pi^* : \Omega^k(M/G) \to \Omega^k(M)$ toma valores en $\Omega^k(M)^G$ y que $\pi^* : \Omega^\bullet(M/G) \to \Omega^\bullet(M)^G$ es un isomorfismo de complejos.
c. Probar que π^* desciende a un morfismo $\pi^* : H^k(M/G) \to H^k(M)$ cuya imagen está contenida en $H^k(M)^G$ y que la restricción $\pi^* : H^k(M/G) \to H^k(M)^G$ es un isomorfismo.
Sugerencia: Use que G es finito, considerando un promedio.
d. Calcular la cohomología del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

25 Sea M una variedad compacta y conexa. Probar que $H^n(M)$ detecta la orientabilidad, más precisamente, $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ si M es orientable y $H^n(M) = 0$ si no.