GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 6: FORMAS DIFERENCIABLES Y ORIENTABILIDAD

Formas diferenciales

Una k-forma sobre una variedad M es una asignación $p \mapsto \omega_p$ donde $\omega_p \in \Lambda^k(T_pM^*)$ es una forma multilineal alternada $\omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$. Diremos que una k-forma es diferenciable si para todos campos $X^1, \cdots, X^k \in \mathfrak{X}(M)$ la función $p \mapsto \omega_p(X^1_p, \cdots, X^k_p)$ es diferenciable. Notaremos por $\Omega^k(M)$ al conjunto de k-formas diferenciables en M.

1 Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. La diferencial en p define un elemento $\mathrm{d}_p f \in T_pM^*$. Probar que la asignación $p \mapsto \mathrm{d}_p f$ define una 1-forma diferenciable en M, que llamaremos $\mathrm{d}f$.

2 Sea M una variedad diferenciable y (U, ϕ) una carta de M. Probar que $\{\mathrm{d}_p\phi^1, \cdots \mathrm{d}_p\phi^n\}$ es la base de T_pM^* dual a la base de los ganchos $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial \phi_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial \phi_n}\right|_p \right\}$ de T_pM. Probar que en estas coordenadas podemos escribir

$$\mathrm{d}_p f = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial \phi_i}\right|_p \mathrm{d}_p\phi^i,$$

y en particular, tenemos la expresión local

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\, \mathrm{d}\phi^i.$$

3 Sea M una variedad de dimensión n. Probar que son equivalentes:

1. ω es una k-forma diferenciable en M.
2. Para toda carta (U, ϕ) de M, en la expresión
$$\omega_p = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_n}(p)\, \mathrm{d}_p\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_p\phi_{i_n}$$
las funciones $a_{i_1 \cdots i_n}$ son diferenciables en U.
3. Para toda carta (U, ϕ) de M y $X^1, \ldots, X^k \in \mathfrak{X}(U)$ tenemos que la función
$$p \mapsto \omega_p(X^1_p, \cdots, X^k_p)$$
es diferenciable en U.
4. ω es una sección diferenciable de $\Lambda^k(TM^*) \to M$ la k-ésima potencia exterior del fibrado cotangente.

4 Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ y $X^1, \ldots, X^{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$. Probar la fórmula

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X^1, \cdots, X^{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X^i \omega(X^1, \cdots, \widehat{X^i}, \cdots, X^{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left([X^i, X^j], X^1, \cdots, \widehat{X^i}, \cdots, \widehat{X^j}, \cdots, X^{k+1} \right).\end{aligned}$$

5 Sean $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$. Se define su *producto exterior* a través de la asignación $p \mapsto (\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p \in \Lambda^{k+l}(T_p M^*)$. Probar que $\omega \wedge \eta$ es una $k+l$-forma diferenciable. Hallar la expresión de $\omega \wedge \eta$ en las coordenadas de una carta en términos de las expresiones de ω y η.

6 Si ω es una k-forma, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim M = 3$?

7 Sean $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega^1(M)$ y $X^1, \ldots, X^r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r(X^1, \cdots, X^r) = \det(\omega_i(X^j)).$$

8 Sea M una variedad diferenciable y $(U, \phi), (V, \psi)$ dos cartas. Probar que

$$\mathrm{d}\psi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi^n = \det(D(\psi \circ \phi^{-1}))\, \mathrm{d}\phi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi^n.$$

9 Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Se define el *pullback* $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ por la fórmula

$$(f^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{f(p)}(\mathrm{d}_p f(v_1), \cdots, \mathrm{d}_p f(v_k))$$

para cada $p \in M$.

1. Probar que f^* está bien definido (es decir, probar que $f^*\omega$ es una k-forma diferenciable).
2. Probar que si $f : M \to N$, $g : N \to S$ son funciones diferenciables y $\omega \in \Omega^k(S)$ entonces $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$.
3. Probar que $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.
4. Probar que si (U, ϕ) es una carta, entonces $\phi^*(\mathrm{d}x_i) = \mathrm{d}\phi^i$.
5. Probar que si (U, ϕ), (V, ψ) son dos cartas, entonces

$$(\phi \circ \psi^{-1})^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) = \det(D(\phi \circ \psi^{-1}))\, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

10 Sea M una variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$. Diremos que ω es una k-forma *cerrada* si $\mathrm{d}\omega = 0$ y que es una k-forma *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = \mathrm{d}\eta$. Probar que:

1. Toda forma exacta es cerrada.
2. Si ω, ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.
3. Si $f : M \to N$ es diferenciable, entonces f^* transforma formas cerradas en cerradas y exactas en exactas.

11 Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable (en el sentido clásico).

1. Demostrar que $\omega^1_F(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω^1_F en la base $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega^1_G = \omega$.
2. Demostrar ahora que $\omega^2_F(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega^2_G = \omega$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función suave. Hallar la relación entre $\mathrm{d}f$ y ∇f, entre $\mathrm{rot}(F)$ y $\mathrm{d}\omega^1_F$, entre $\mathrm{div}(F)$ y $\mathrm{d}\omega^2_F$ y concluir, usando la relación $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, las fórmulas clásicas $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ y $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0$.

Orientabilidad

12 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Diremos que dos bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V son equivalentes si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Una *orientación* de V es una clase de equivalencia de bases ordenadas de V. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para cada $p \in M$ existe una orientación $o(p)$ del espacio tangente T_pM que varía suavemente, o más precisamente, para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p y campos $X^1, \ldots, X^n \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $o(q) = [X^1_q, \cdots, X^n_q]$ para todo $q \in U$.
2. Existe un atlas orientado de M, es decir, un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ de modo tal que $\det(D(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})) > 0$ para todos α, β.
3. Existe una n-forma ω nunca nula en M, es decir, $\omega_p \neq 0$ para cada $p \in M$.

13 Sea M una variedad. Probar que su fibrado tangente TM y su fibrado cotangente T^*M son variedades orientables.

14 Probar que si M tiene un atlas de la forma $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable. Concluir por ejemplo que S^2 es orientable.

15 Probar que toda variedad paralelizable es orientable. Concluir en particular que todo grupo de Lie es orientable.

16 Probar que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$$

es una n-forma en $\mathbb{R}^{n+1}$ y que si $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión entonces $i^*\omega$ es una n-forma nunca nula en S^n. Concluir que S^n es orientable.

17 Sea M una variedad conexa. Definimos

$$O(M) = \{(p, o(p)) : p \in M, o(p) \text{ orientación de } T_pM\}$$

con la proyección canónica $\pi : O(M) \to M$ en la primera coordenada. Para cada carta (U, ϕ) de M tomamos el abierto

$$\widetilde{U} = \left\{ \left(p, \left[\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right] \right) : p \in U \right\}$$

donde $\left[\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right]$ es la orientación dada por la base de los ganchos. Probar que el conjunto $\{\widetilde{U} : (U, \phi) \text{ carta}\}$ nos permite dotar a $O(M)$ de una estructura de variedad diferenciable y que la proyección $\pi : O(M) \to M$ resulta ser un revestimiento de dos hojas diferenciable. Probar que M es orientable si y sólo si $O(M)$ tiene dos componentes conexas. Deducir que si $\pi_1(M, *)$ no tiene subgrupos de índice 2, M es orientable.

18 Sean M y N variedades orientadas y $f : M \to N$ una función diferenciable. Diremos que f preserva la orientación en $p \in M$ si $\mathrm{d}_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales orientados.

1. Probar que si $(U, \phi), (V, \psi)$ son cartas orientadas de M y N respectivamente, f preserva la orientación en p si y sólo si $\det(D(\psi \circ f \circ \phi^{-1}))(\phi(p)) > 0$.
2. Probar que si ω_M y ω_N son n-formas que definen la orientación en M y N respectivamente y $f^*(\omega_N)_p = \phi(p)(\omega_M)_p$ entonces f preserva la orientación en p si y sólo si $\phi(p) > 0$.

19 Sea M una variedad diferenciable conexa y orientada y G un grupo discreto actuando en M de forma propiamente discontinua por difeomorfismos. Probar que M/G es orientable si y sólo si para cada $g \in G$ el difeomorfismo $p \mapsto g \cdot p$ preserva la orientación en todos los puntos. Probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si y sólo si n es impar.

20 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y T^*M su fibrado cotangente. Sea (U, ϕ) una carta de M y $\psi = (\phi^1, \cdots, \phi^n, \mathrm{d}\phi^1, \cdots, \mathrm{d}\phi^n)$ la carta $\psi : T^*U \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ asociada a (U, ϕ) en T^*U. Tomamos la 2-forma en T^*U dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\psi_i \wedge \mathrm{d}\psi_{n+i}.$$

Probar que esta forma no depende de la carta (U, ϕ). Deducir que esto define una 2-forma global en T^*M que es no degenerada y exacta.

21 Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M de dimensión $2n$ provista de una 2-forma ω no degenerada y cerrada. Probar que toda variedad simpléctica (M, ω) es orientable.

22 Sea M una variedad holomorfa de dimensión compleja n. Entonces M vista como variedad diferenciable de dimensión $2n$ resulta orientable.