GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

Práctica 5: Álgebra multilineal

1 Sean V, W dos k-espacios vectoriales. Consideremos $F(V,W)$ el espacio vectorial *libre* cuyos generadores son los elementos de $V \times W$, es decir, $F(V,W)$ consiste de todas las combinaciones lineales finitas de pares (v,w) con $v \in V$, $w \in W$. Sea $R(V,W)$ el subespacio de $F(V,W)$ generado por el conjunto de todos los elementos de $F(V,W)$ de la forma

$$\begin{cases} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w) \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2) \\ (av,w)-a(v,w) \\ (v,aw)-a(v,w) \end{cases}$$

donde $a \in k$, $v, v_1, v_2 \in V$ y $w, w_1, w_2 \in W$. El espacio cociente $F(V,W)/R(V,W)$ se llama el *producto tensorial* de V y W y lo denotamos por $V \otimes_k W$. La clase de un elemento (v,w) será denotada por $v \otimes w$ y diremos que es un *tensor elemental*. Probar que el producto tensorial cumple las siguientes propiedades:

- *Propiedad universal*: Sea $\phi : V \times W \to V \otimes_k W$ la función bilineal $(v,w) \mapsto v \otimes w$. Probar que para toda función bilineal $f : V \times W \to U$ existe una única función lineal $\widetilde{f} : V \otimes_k W \to U$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & V \otimes_k W \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

- $V \otimes_k W$ es canónicamente isomorfo a $W \otimes_k V$.
- $(V \otimes_k W) \otimes_k U$ es canónicamente isomorfo a $V \otimes_k (W \otimes_k U)$.
- La función bilineal $V^* \times W \to \mathrm{Hom}_k(V,W)$ definida por $(v^*,w)(v) = v^*(v)w$ determina de modo único una función lineal $V^* \otimes_k W \to \mathrm{Hom}_k(V,W)$. Probar que esta función es un isomorfismo y que en consecuencia $\dim(V \otimes_k W) = \dim V \dim W$.
- Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V y $\{w_1, \cdots, w_m\}$ es una base de W, entonces los tensores elementales $\{v_i \otimes w_j : i,j\}$ forman una base de $V \otimes_k W$.
- Sean $f_1 : V_1 \to W_1$, $f_2 : V_2 \to W_2$ dos funciones k-lineales. Probar que la expresión de $f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes_k V_2 \to W_1 \otimes_k W_2$ en bases coincide con el producto de Kronecker definido como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

  donde A y B son las matrices de f_1 y f_2 en bases.
- Si $f : V \to W$ es k-lineal, calcular la matriz de $f^{\otimes k} : V^{\otimes k} \to W^{\otimes k}$ en bases.

2 El *álgebra tensorial* de un k-espacio vectorial V se define como

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$$

donde $T^n(V) = \underbrace{V \otimes_k \cdots \otimes_k V}_{n \text{ veces}}$. Definimos una multiplicación

$$\otimes : T^k(V) \times T^l(V) \to T^{k+l}(V)$$

extendiendo por linealidad la yuxtaposición de tensores elementales

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_l) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_l.$$

Probar que $T(V)$ es una k-álgebra asociativa.

3 Sea V un k-espacio vectorial. Un tensor de tipo (r,s) es un elemento del espacio

$$V_{r,s} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ veces}}.$$

Supongamos que V es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Probar que $V_{r,s}^*$ es isomorfo al k-espacio vectorial de funciones multilineales

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ veces}} \to k.$$

4 Definimos el *álgebra simétrica* de un k-espacio vectorial V como $S(V) = T(V)/I$ donde I es el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $v \otimes w - w \otimes v$ para todos $v, w \in V$. Supongamos que $\mathrm{char}(k)$ no divide a $n!$.

1. Probar que si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base de V entonces $S(V^*) \simeq k[x_1, \cdots, x_n]$.
2. Probar que si $\mathrm{Sym} : T(V) \to T(V)$ es el morfismo dado por

$$\mathrm{Sym}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

   entonces $I = \ker \mathrm{Sym}$.
3. Un elemento de $T(V)$ se dice un *tensor simétrico* si queda fijo por Sym. Definimos el producto de dos tensores simétricos ω_1, ω_2 en $T(V)$ como

$$\omega_1 \odot \omega_2 = \mathrm{Sym}(\omega_1 \otimes \omega_2).$$

   Denotaremos por $S'(V)$ al álgebra de tensores simétricos.
4. Probar que $\mathrm{Sym} : T(V) \to T(V)$ es un proyector cuya imagen es el álgebra de tensores simétricos y que Sym induce un isomorfismo $\mathrm{Sym} : S(V) \to S'(V)$.

5 Definimos el *álgebra exterior* de un k-espacio vectorial V como $\Lambda(V) = T(V)/J$ donde J es el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $v \otimes w + w \otimes v$ para todos $v, w \in V$. Supongamos que $\mathrm{char}(k)$ no divide a $n!$.

1. Probar que si $\mathrm{Alt} : T(V) \to T(V)$ es el morfismo dado por

$$\mathrm{Alt}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

   entonces $J = \ker \mathrm{Alt}$.
2. Un elemento de $T(V)$ se dice un *tensor alternado* si queda fijo por Alt. Definimos el producto de dos tensores alternados $\omega_1 \in V^{\otimes k}, \omega_2 \in V^{\otimes m}$ como

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \mathrm{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2).$$

   Denotaremos por $\Lambda'(V)$ al álgebra de tensores alternados.
3. Probar que $\mathrm{Alt} : T(V) \to T(V)$ es un proyector cuya imagen es el álgebra de tensores alternados y que Alt induce un isomorfismo $\mathrm{Alt} : \Lambda(V) \to \Lambda'(V)$.

6 Definimos la $\Lambda^k(V)$ *k-ésima potencia exterior de V* como la imagen de $T^k(V)$ por la proyección canónica $T(V) \to \Lambda(V)$. Notamos por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a la clase de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ en $\Lambda^k(V)$. Probar que:

1. $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ si $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente dependientes.
2. Si $\sigma \in S_k$ entonces $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.
3. $\Lambda^k(V) = 0$ si $k > \dim(V)$.
4. Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base (ordenada) de V, entonces la colección de los elementos de la forma $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ resulta una base de $\Lambda^k(V)$. Concluir que $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$ para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Identificar $\Lambda(V)$ con $\bigoplus_{k \ge 0} \Lambda^k(V)$.

7 Una función multilineal $f : V^k = V \times \cdots \times V \to W$ se dice *alternada* si

$$f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}(\sigma)) f(v_1, \cdots, v_k)$$

para todos $v_1, \ldots, v_k \in V$ y $\sigma \in S_k$.

Sea $\phi : V^k = V \times \cdots \times V \to \Lambda^k(V)$ la función dada por $\phi(v_1, \cdots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Probar que ϕ es multilineal y alternada y que tiene la siguiente propiedad universal: dada cualquier $\psi : V^k = V \times \cdots \times V \to T$ multilineal y alternada, existe una única $\widetilde{\psi} : \Lambda^k(V) \to T$ lineal tal que $\widetilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Deducir que si $A_k(V)$ es el subespacio de $T^{0,k}(V)$ formado por las funciones multilineales y alternadas de V en k entonces $A_k(V) \simeq \Lambda^k(V)^*$.

8 Consideremos la forma bilineal

$$\langle -, - \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to k, \;\; (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*, u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \mapsto \det(v_i^*(u_j)).$$

Probar que es una forma bilineal no degenerada y por lo tanto induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\Lambda^k(V)^*$ y $\Lambda^k(V^*)$.

9 Sean $\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{w_1, \cdots, w_n\}$ bases de V. Probar que si $w_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j$ entonces

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \det(c_{ij})\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

10 Probar que las álgebras tensorial, simétrica y exterior son funtoriales, es decir

- Si $f : V \to W$ es lineal, f induce morfismos de álgebras $Tf : T(V) \to T(W)$, $Sf : S(V) \to S(W)$ y $\Lambda f : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$.
- Estos morfismos respetan la composición: si $f : V \to W$ y $g : W \to Z$ son lineales entonces $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$, $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$ y $\Lambda(g \circ f) = \Lambda g \circ \Lambda f$.
- $T(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $S(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ y $\Lambda(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

11 Sea $f : V \to W$ una aplicación k-lineal. Calcular la matriz de $\Lambda^r(f) : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(W)$ en bases.

12 Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base. Probar que si g es otro endomorfismo entonces $\det(fg) = \det(f)\det(g)$.
Sugerencia: Considerar $\Lambda^n f : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ donde $n = \dim V$.

13 Sea V un espacio vectorial con base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ su base dual. En $V \otimes V^*$ consideramos el elemento $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^*$. Probar que este elemento no depende de la base elegida.

14 Sea V un espacio vectorial. Supongamos que V está provisto de un producto interno: es decir, una forma bilineal $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica y no degenerada.

1. Probar que la forma bilineal $\langle -, - \rangle : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(V)$ inducida por
$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k \rangle = \det \left(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{ij} \right), \quad \alpha_i, \beta_j \in V$$
y extendida por bilinealidad es simétrica y no degenerada y así define un producto interno en $\Lambda^k(V)$.
2. Probar que si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es una base de V y $v, w \in \Lambda^k(V)$ entonces existe un único $\star w \in \Lambda^{n-k}(V)$ de modo tal que
$$v \wedge \star w = \langle v, w \rangle \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$
3. Probar que $\star(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n$.
4. Concluir que tenemos un isomorfismo lineal $\star : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$.