GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 4: CAMPOS TANGENTES, FLUJOS Y GRUPOS DE LIE

Campos tangentes y flujos

1 Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_pM$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

2 Sea M una variedad, $p \in M$ un punto y X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, ϕ) de p tal que $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial \phi_1}$.

3 Sea M una variedad, $p \in M$ un punto y $X_1, \cdots, X_k$ campos definidos en un entorno de p tales que $\{X_1(p), \cdots, X_k(p)\}$ son linealmente independientes en T_pM. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \cdots, X_k(q)\}$ son linealmente independientes para todo $q \in U$.

4 Sea M una variedad y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos. El *corchete de Lie* se define como

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ pensando a los campos como derivaciones. Probar que $[X, Y]$ es un campo tangente. Probar que si (U, ϕ) es una carta de M en la que

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial \phi_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

entonces

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial \phi_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \phi_j} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

5 Dados campos X, Y en una variedad M y funciones diferenciables $f, g : M \to \mathbb{R}$, probar la fórmula de Lie-Rinehart:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

6 Probar que, bajo la identificación $T_I\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ se tiene que

$$[X_A, X_B] = X_{[A,B]} = X_{AB-BA}$$

donde $X_A(M) = AM$ es el campo tangente asociado a A.

7 Calcular las curvas integrales y el grupo uniparamétrico definidos por el campo X en cada uno de los siguientes casos

a. $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a, b) = b\dfrac{\partial}{\partial x} + a\dfrac{\partial}{\partial y}$.

b. $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a, b) = a\dfrac{\partial}{\partial x} - b\dfrac{\partial}{\partial y}$.

c. $M = S^2$ y $X(a, b, c) = (c - b)\dfrac{\partial}{\partial x} + a\dfrac{\partial}{\partial y} - a\dfrac{\partial}{\partial z}$.

d. $M = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $X(A) = AB \in T_A\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ con $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

8 Sea γ una curva integral de un campo X definido sobre M. Probar que si $\dot{\gamma}(t) = 0$ para algún t, entonces γ es constante.

9 Sea M una variedad, $\varepsilon > 0$ fijo y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tal que para todo $p \in M$ la curva integral de X que pasa por p está definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Probar que X es completo.

10
- **a.** Sea M una variedad compacta y X es un campo tangente sobre M. Probar que X es completo.
- **b.** Probar que si $\mathrm{Sop}(X) = \overline{\{p \in M : X(p) \neq 0\}}$ es compacto, X debe ser completo.

11 Sea M una variedad y sea $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ una acción suave. Para cada $t \in \mathbb{R}$ notamos $\theta_t(p) = \theta(t, p)$ (con esta notación, el hecho de que θ sea una acción suave nos dice que θ_t es un difeomorfismo para cada t y que $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$). Para cada $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable definimos

$$X(f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta_t(p)) - f(p)}{t}.$$

Probar que X es un campo diferenciable y que su flujo es exactamente θ.

12 Sea $f : M \to N$ diferenciable. Un par de campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = \mathrm{d}_p f(X(p))$ para todo $p \in M$. Lo notaremos $X \sim_f Y$.
- **a.** Probar que si $X \sim_f Y$ y $Y \sim_g Z$ entonces $X \sim_{g \circ f} Z$.
- **b.** Probar que si $X_1 \sim_f Y_1$ y $X_2 \sim_f Y_2$ entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

13 Sean $f : M \to N$ diferenciable, y sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ dos campos f-relacionados. Probar que si $\gamma : (a, b) \to M$ es una curva integral de X entonces $f \circ \gamma$ es una curva integral de Y.

14 (Teorema de Ehresmann) Sea $f : M \to U \subseteq \mathbb{R}$ diferenciable, propia, sobreyectiva y tal que todo $t \in U$ es valor regular.
- **a.** Probar que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X \sim_f \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. ¿Es único?
- **b.** Sea X como en el ítem anterior. Probar que X es completo.
- **c.** Probar que $f^{-1}(u)$ es difeomorfo a $f^{-1}(u')$ para todos $u, u' \in U$.

Grupos de Lie

15 Sea G un grupo de Lie y notemos $L_g : G \to G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Decimos que un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante a izquierda* si para todos $g, h \in G$ se tiene $(\mathrm{d}_h L_g)(X(h)) = X(gh) = X(L_g(h))$.
- **a.** Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo G.
- **b.** Probar que si $v \in T_g G$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.
- **c.** Deducir que hay un isomorfismo entre $T_e G$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.
- **d.** Probar que todo grupo de Lie es paralelizable.

16 Un *álgebra de Lie* sobre un cuerpo k es un k-espacio vectorial V provisto de una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ que satisface las siguientes dos condiciones:
- **Antisimetría:** $[X, Y] = -[Y, X] \ \ \forall\, X, Y \in V$.
- **Identidad de Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ \ \forall\, X, Y, Z \in V$.

Probar que si M es una variedad, $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$.

17 Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda, entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda. Deducir que $\mathfrak{g} = T_e G$ hereda una estructura de álgebra de Lie. Diremos que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G.

18 Sea G un grupo de Lie y tomemos $v \in T_e G$. Sea X_v el único campo invariante a izquierda con $X(e) = v$ y denotemos por Φ_v^t el grupo uniparamétrico definido por X_v. Sea $\exp : T_e G \to G$ dada por $\exp(v) = \Phi_v^1(e)$. Probar que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces $f \circ \exp = \exp \circ \, \mathrm{d}_e f$.

19 Probar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie y que, identificando $T_I \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq M_n(\mathbb{R})$, la exponencial $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definida como en el ejercicio anterior coincide con la exponencial matricial

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

¿Hay alguna relación entre $\exp(A + B)$ y $\exp(A)\exp(B)$?

20 Sean G, H grupos de Lie conexos y sean $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie respectivamente. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Son equivalentes:

- f es sobreyectiva y $\ker f$ es discreto.
- El morfismo inducido $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un isomorfismo.