GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 3: SUBVARIEDADES, INMERSIONES Y SUBMERSIONES

1 Sea M una variedad de dimensión d y sea $S \subseteq M$ un espacio con la topología subespacio. Probar que son equivalentes:

a. Para cada $p \in S$ existe una carta local (U, ϕ) tal que $\phi(U) = V \times W$ donde $V \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq \mathbb{R}^{d-k}$ son abiertos que contienen al origen y además se verifica que $\phi(U \cap S) = V \times \{0\}$.

b. S es una variedad diferenciable de dimensión k y la inclusión $S \hookrightarrow M$ es un embedding.

En esta situación, diremos que S es una *subvariedad* de M de dimensión k.

2 Sean M, N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Supongamos que $f : M \to N$ una función diferenciable.

a. Teorema del rango constante: Si f tiene rango constante k, para cada $p \in M$ existen cartas (U, ϕ) de un entorno de p y (V, ψ) de un entorno de $f(p)$ de modo que $f(U) \subseteq V$ y se verifica que

$$\psi\, f\, \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

b. Concluir que si $f : M \to N$ es una función diferenciable de rango constante k entonces para todo $c \in N$ los conjuntos de nivel $f^{-1}(c)$ son subvariedades de M de dimensión $m - k$.

c. Más aún, si $f : M \to N$ es una función diferenciable y $c \in N$ es un *valor regular* (es decir, para todo punto $p \in f^{-1}(c)$ tenemos que $\mathrm{d}_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ es sobreyectiva) entonces $f^{-1}(c)$ es una subvariedad de M de dimensión $m - n$. Además, probar que $T_p(f^{-1}(c)) \simeq \ker(\mathrm{d}_p f : T_p M \to T_c N)$ para todo $p \in f^{-1}(c)$.

3 **a.** Probar que S^n es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b. Probar que el cono sin el vértice

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué pasa si consideramos todo el cono?

c. Probar que $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t))$ es una inmersión pero no un embedding. Probar que la imagen de α no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

d. Probar que la superficie de revolución generada por cualquier curva regular en el plano xz alrededor del eje z es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

4 Sean M y N dos variedades diferenciables y sean TM y TN sus variedades tangentes asociadas. Probar que si $f : M \to N$ es un embedding entonces $\mathrm{d}f : TM \to TN$ es un embedding. ¿Vale la recíproca?

5 Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una inmersión inyectiva. Probar que si f es cerrada entonces f es un embedding. Concluir, bajo estas hipótesis, que si adicionalmente M es compacta o f es propia, entonces f es un embedding.

6 Sea M una variedad compacta de dimensión d y sea $f : M \to \mathbb{R}^d$ una función diferenciable. Probar que f no es regular. Concluir que no hay un embedding de una variedad compacta de dimensión d en $\mathbb{R}^d$.

7 El objetivo de este ejercicio es probar que aunque no es cierto que toda subvariedad se consigue como el conjunto de nivel de un valor regular, localmente sí es cierto.

- **a.** La función $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definida por $(x : y) \mapsto (x : y : 0)$ es un embedding y así su imagen S es una subvariedad de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Probar que no existe ninguna función diferenciable $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que tenga al 0 como valor regular y tal que $g^{-1}(0) = S$.
- **b.** Sea $S \subseteq M$ un subconjunto con la topología subespacio. Probar que S es una subvariedad de dimensión k de M si y sólo si para cada punto $p \in S$ existe un entorno abierto $U \subseteq M$ tal que $U \cap S$ es el conjunto de nivel de una submersión $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

8 Sean M, N variedades diferenciables y $\pi : M \to N$ una submersión. Probar que π es abierta. Más aún, probar que todo punto de M está en la imagen de una sección local de π.

9 Sean X, Y variedades diferenciables y $f : X \to Y$ una submersión sobreyectiva. Supongamos que Y es conexo y $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$. Probar que X es conexo.

10 Sean M y N variedades de dimensión d, con M compacta y $f : M \to N$ diferenciable.

- **a.** Probar que si $p \in N$ es valor regular, entonces $f^{-1}(p)$ es un conjunto finito.
- **b.** Probar que la asignación $p \mapsto \# f^{-1}(p)$ es localmente constante (donde p recorre valores regulares de f).

11

- **a.** Sea (U, ϕ_N) la carta de S^2 dada por la proyección estereográfica. Probar que un polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ define una función diferenciable $f_P : S^2 \to S^2$ cuya expresión local $\phi_N \circ f_P \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se identifica con P.
- **b.** Probar el Teorema Fundamental del Álgebra.

12 Sea M una variedad de dimensión d, U abierto en M y $p \in U$ un punto del abierto. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_d : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $\{\mathrm{d}_p\phi_1, \ldots, \mathrm{d}_p\phi_d\}$ son linealmente independientes en $(T_pM)^*$. Probar que las funciones $\{\phi_i\}$ determinan una carta de M en un entorno de p.

13

- **a.** Sea $f : M \to N$ diferenciable, $\dim M \leq \dim N$. Sea $p \in M$ punto regular, y sea (U, ϕ) carta de N con $f(p) \in U$. Probar que un subconjunto de las funciones $\{\phi_i \circ f\}$ determina una carta de M en un entorno de p.
- **b.** Sea $S \subset N$ una subvariedad y sea $f : M \to N$ diferenciable tal que $f(M) \subset S$. Probar que $f : M \to S$ es diferenciable.

14 Sea $f : M \to N$ una función diferenciable, y sea X otra variedad diferencial.

- **a.** Probar que si f es una inmersión entonces para toda $g : X \to M$ función continua tal que $f \circ g$ es diferenciable se puede deducir que g es diferenciable.
- **b.** Probar que si f es un embedding entonces para toda $g : X \to M$ función tal que $f \circ g$ es diferenciable se puede deducir que g es continua y diferenciable.
- **c.** Probar que si f es una submersión sobreyectiva entonces para toda $g : N \to X$ función tal que $g \circ f$ es diferenciable se puede deducir que g es diferenciable.

15 Sean $f : M \to N$ una función diferencial y S una subvariedad de N tales que para todo $p \in f^{-1}(S)$ vale que $\mathrm{d}_p f(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$. Probar que $f^{-1}(S)$ es una subvariedad de M de dimensión $\dim M - \dim N + \dim S$.

16 Decimos que dos subvariedades S_1, S_2 de M son *transversales*, y lo notamos $S_1 \pitchfork S_2$, si para todo $p \in S_1 \cap S_2$ tenemos que $T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$.

a. Probar que si $S_1 \pitchfork S_2$, entonces $S_1 \cap S_2$ es una subvariedad de M.

b. Probar además que si $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ entonces

$$\dim S_1 \cap S_2 = \text{máx}\{\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M, 0\}.$$