GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 2: ESPACIOS TANGENTES Y FIBRADOS VECTORIALES

Espacios tangentes

1 Sea M una variedad diferencial de dimensión d y $p \in M$ un punto. Probar que las siguientes descripciones del espacio tangente a M en p son equivalentes:

a. Derivaciones en p, es decir, funcionales lineales en el espacio de funciones diferenciables que cumplen la regla de Leibniz

$$T_pM = \{D : \mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ lineal} : D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)\}.$$

b. El espacio dual de $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ donde $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : f(p) = 0\}$.

c. El espacio dual de $\overline{\mathfrak{m}}_p/\overline{\mathfrak{m}}_p^2$ donde $\overline{\mathfrak{m}}_p$ es el ideal de gérmenes de funciones en p que se anulan en p.

d. Familias $((U,\phi),v)$ con (U,ϕ) una carta alrededor de p y $v \in \mathbb{R}^d$, bajo la relación

$$((U,\phi),v) \sim ((V,\psi),w) \text{ si } w = D(\psi\phi^{-1})(\phi(p))v.$$

Con cada descripción del espacio tangente, definir la diferencial $\mathrm{d}_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ de una función diferenciable $f : M \to N$.

2 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\phi : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El gráfico

$$\Gamma_\phi = \{(x,\phi(x)) : x \in U\}$$

es una variedad diferenciable con la carta global (Γ_ϕ, π) con $\pi : \Gamma_\phi \to \mathbb{R}^n$ definida por $\pi((x,\phi(x))) = x$. Si $f : \Gamma_\phi \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f((x,\phi(x)) = \phi(x)$, calcular

$$\left.\frac{\partial}{\partial \pi^i}\right|_p (f)$$

en función de las derivadas parciales de ϕ.

3 Sea M una variedad diferencial, $p \in M$ un punto y fijemos una carta (U,ϕ) de M alrededor de p. Diremos que dos curvas $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ son *equivalentes* si las derivadas $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \gamma_1)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \gamma_2)\right|_{t=0}$ coinciden. Lo denotaremos $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Probar que:

a. $\sim$ es una relación de equivalencia.

b. $\sim$ no depende de la carta (U,ϕ) elegida.

c. El conjunto de clases de equivalencia puede ser dotado de estructura de espacio vectorial de forma natural y resulta isomorfo al espacio tangente en p. Definir la diferencial de una función en un punto en términos de esta nueva construcción.

4 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que 0 es un valor regular (es decir, si $f(p) = 0$ entonces $\nabla f(p) \neq 0$). Si $M = f^{-1}(0)$, probar que T_pM puede identificarse con el espacio ortogonal a $\nabla f(p)$.

5 Probar que $f : M \to N$ es un difeomorfismo en un entorno de $p \in M$ si y sólo si $\mathrm{d}_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ es un isomorfismo.

6 Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Probar que si f es constante en un entorno U de p entonces $\mathrm{d}_p f = 0$. Recíprocamente, si $\mathrm{d}_p f = 0$ para todo p en un abierto conexo U, entonces $f|_U$ es constante.

7 Sean M, N variedades y p, q puntos en ellas respectivamente. Tomemos las inclusiones $\iota_M : M \to M \times N$ dada por $\iota_M(x) = (x, q)$ y $\iota_N : N \to M \times N$ dada por $\iota_N(y) = (p, y)$. Probar que

$$T_{(p,q)}(M \times N) = \mathrm{d}_p \iota_M(T_p M) \oplus \mathrm{d}_q \iota_N(T_q N).$$

Ejemplos

8 Se considera el toro $T = S^1 \times S^1$ y la función $f(e^{it}, e^{iu}) = \sin(3t)\cos(5u)$, mirando $S^1 \subset \mathbb{C}$. Elegir alguna carta alrededor de $p = (1, 1)$ en T y calcular las derivadas de f con respecto a las coordenadas dadas por la carta en p.

9 Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera y $f : S^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{dist}(x, N)^2$ donde $N = (0, 0, 1)$. Consideremos ademas, las cartas (U, ϕ_N) y (V, ϕ_S) dadas por las proyecciones estereográficas y $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Se definen los vectores tangentes

$$v_1 = 8 \left.\frac{\partial}{\partial \phi_N^1}\right|_p + 5\sqrt{2} \left.\frac{\partial}{\partial \phi_N^2}\right|_p, \qquad v_2 = (-15\sqrt{2} + 20) \left.\frac{\partial}{\partial \phi_S^1}\right|_p + (-24 + 16\sqrt{2}) \left.\frac{\partial}{\partial \phi_S^2}\right|_p.$$

a. Probar que f es diferenciable.
b. Calcular $v_1(f)$ y $v_2(f)$.
c. Probar que en realidad $v_1 = v_2$.

10 Consideremos $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Dado que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es un abierto, identificamos $T_I \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq T_I \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ y llamamos e_{ij} a las coordenadas así dadas. Calcular $\dfrac{\partial \det}{\partial e_{ij}}$ y $\left.\dfrac{\partial \det}{\partial e_{ij}}\right|_I$.

11 Calcular la diferencial de $f : S^1 \times (-1, 1) \to S^2$,

$$f(z, t) = (z_1\sqrt{1 - t^2}, z_2\sqrt{1 - t^2}, t), \quad \text{donde } z = z_1 + iz_2,$$

en los puntos de la forma $(1, t) \in S^1 \times (-1, 1)$.

12 Hallar la diferencial de las siguientes funciones en el punto indicado.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (xy + y^2, e^{x-y})$ en $(7, 3)$.
b. $g : S^1 \to S^1$ dada por $g(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, en cualquier punto.
c. El producto de matrices $\mu : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ en cualquier punto.
d. La inversa de matrices $i : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en la identidad.
e. Las restricciones de μ e i a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en la identidad.
f. $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dada por $f(a : b : c) = (b : a : c)$ en cualquier punto.

13 Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (xy, z)$.

a. Hallar los puntos críticos de f.
b. Hallar los puntos críticos de $f|_{S^2}$.
c. Hallar el conjunto C de valores críticos de $f|_{S^2}$.
d. Probar que C tiene medida 0.

Fibrados vectoriales

Sea V un espacio vectorial real. Recordemos que un **fibrado vectorial** de fibra V sobre una variedad diferencial M consiste de una variedad diferencial E junto con una función diferenciable $\pi : E \to M$ tal que

- Para cada $p \in M$ la fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial.
- Para todo $p \in M$ existen un entorno U y un difeomorfismo $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times V \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

- Para todo p, ϕ y U como en el ítem anterior, la restricción $\phi_U : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

El espacio E se llama el *espacio total*, M el *espacio base*, π la *proyección* y U es un *abierto trivializante*. Dados dos abiertos trivializantes U, V la función $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ es llamada la *función de transición*. Decimos que un fibrado es *trivial* si se puede tomar a M como un abierto trivializante. Una *sección* de $\pi : E \to M$ es una función diferenciable $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

14 Sea M una variedad diferencial de dimensión d. Consideremos

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\},$$

la unión disjunta de los espacios tangentes.

a. Si (U, ϕ) es una carta, definimos $\widetilde{U} = \{(p, v) : p \in U, v \in T_pM\}$ y una función $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\widetilde{\phi}(p, v) = \left(\phi(p), v^1, \cdots, v^d\right)$$

donde $v = v^1 \left.\frac{\partial}{\partial \phi^1}\right|_p + \cdots + v^d \left.\frac{\partial}{\partial \phi^d}\right|_p$. Probar que

$$\mathscr{A} = \left\{(\widetilde{U}, \widetilde{\phi}) : (U, \phi) \text{ carta de } M\right\}$$

induce una estructura de variedad diferenciable sobre TM. ¿Cuál es su dimensión?

b. Probar que la proyección canónica $\pi : TM \to M$ es una función diferenciable de rango constante.

c. Sea $f : M \to N$. Probar que $\mathrm{d}f : TM \to TN$ definida por $\mathrm{d}f(p, v) = (f(p), \mathrm{d}_pf(v))$ es una función diferenciable.

d. Probar que $\pi : TM \to M$ es un fibrado vectorial que llamaremos *fibrado tangente*. Encontrar un cubrimiento por abiertos trivializantes y calcular las funciones de transición.

15 Probar que los siguientes son fibrados vectoriales, hallar su fibra y las funciones de transición.

a. El *fibrado tautológico* de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. El espacio total se define como

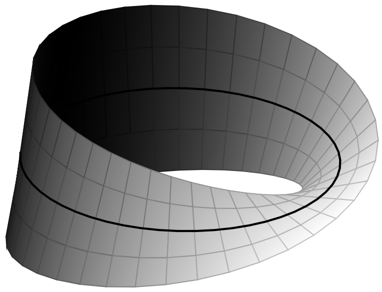
$$\gamma_n = \{([v], p) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} : p \in v\}$$

y $\pi : \gamma_n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es la proyección en la primera coordenada.

b. El *fibrado de Moebius* sobre S^1. El espacio total se define como $E = [0,1] \times \mathbb{R}/\sim$ donde

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ si } b = -d \text{ y } \begin{cases} a = 0, c = 1, \\ a = 1, c = 0 \end{cases}$$

y la proyección está dada por $\pi : E \to S^1$, $\pi(\overline{(x,y)}) = e^{2\pi i x}$.



16 Sea M una variedad diferencial y $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial y sea n la dimensión de las fibras.

a. Probar que $\pi : E \to M$ es el fibrado trivial si y sólo si existen secciones $s_1, \ldots, s_n$ tales que $(s_1(p), \ldots, s_n(p))$ es una base de $\pi^{-1}(p)$ para cada $p \in M$.

b. Probar que el fibrado tautológico nunca es trivial.
Sugerencia: probar que toda sección del fibrado tautológico debe anularse.

17 Diremos que una variedad es *paralelizable* si su fibrado tangente es trivial. Probar que S^1, S^3 y $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ son paralelizables. Probar que S^2 no es paralelizable.

Álgebra de campos

18 Consideremos el anillo $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ Probar que T_pM se puede identificar con los morfismos de anillos

$$\mathscr{D}_p(M) \to \mathbb{R}[\varepsilon]$$

donde $\mathscr{D}_p(M)$ es el anillo de gérmenes de funciones en p.

19 Consideremos el conjunto de $\mathbb{R}$-derivaciones de $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})) = \{D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})) : D(fg) = fD(g) + gD(f)\}.$$

Probar que $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}), \mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\varepsilon])$.

20 Sea M una variedad y $U \subseteq M$ un abierto. El conjunto de *campos tangentes sobre U* se define como

$$\mathfrak{X}(U) = \{X \in \mathscr{C}^\infty(U, TM) : \pi \circ X = \mathrm{id}\}.$$

Probar que

a. Probar que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R})$-módulo.

b. Probar que para todo punto $p \in M$ existe un entorno U de p tal que $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R})$-módulo libre. ¿Cuál es el rango de este módulo?

c. Probar que M es paralelizable si y sólo si $\mathfrak{X}(M)$ es un $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo libre.