GEOMETRÍA DIFERENCIAL – 1ER CUATRIMESTRE 2017

PRÁCTICA 1: VARIEDADES Y FUNCIONES DIFERENCIABLES

Generalidades

1 Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferencial, exhibir un atlas y hallar la dimensión en cada caso.

a. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.
b. La esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
c. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = -y$.
d. El toro $T_n = S^1 \times \cdots \times S^1$.
e. El cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
f. El grupo general lineal $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$.
g. El grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
h. El grupo ortogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^\intercal = 1\}$.
i. El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

2 Sea M una variedad diferencial de dimensión d y sea $U \subseteq M$ abierto.

a. Probar que U hereda una estructura de variedad con $\dim(U) = \dim(M)$ y que la inclusión $U \hookrightarrow M$ es diferenciable para esa estructura.
b. Probar que un subconjunto $S \subseteq M$ (con la topología subespacio) es una variedad de dimensión d si y sólo si S es abierto en M.

3 Sea M una variedad diferencial conexa. Probar que para cada par de puntos $p, q \in M$ existe un camino suave $c : [0,1] \to M$ que los une (es decir, c es una función continua en $[0,1]$, diferenciable en $(0,1)$, y $c(0) = p$, $c(1) = q$).

4 Sean M, N variedades diferenciales. Probar que una función $f : M \to N$ es diferenciable si y sólo si $g \circ f : N \to \mathbb{R}$ es diferenciable para toda $g : N \to \mathbb{R}$ diferenciable.

5 Sea M una variedad diferencial y $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica. Probar que $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to M$ es diferenciable si y sólo si $f \circ p : S^n \to M$ es diferenciable. Comparar el rango de f con el de $f \circ p$.

6 Sea M una variedad diferencial de dimensión d y (U, ϕ) una carta de M.

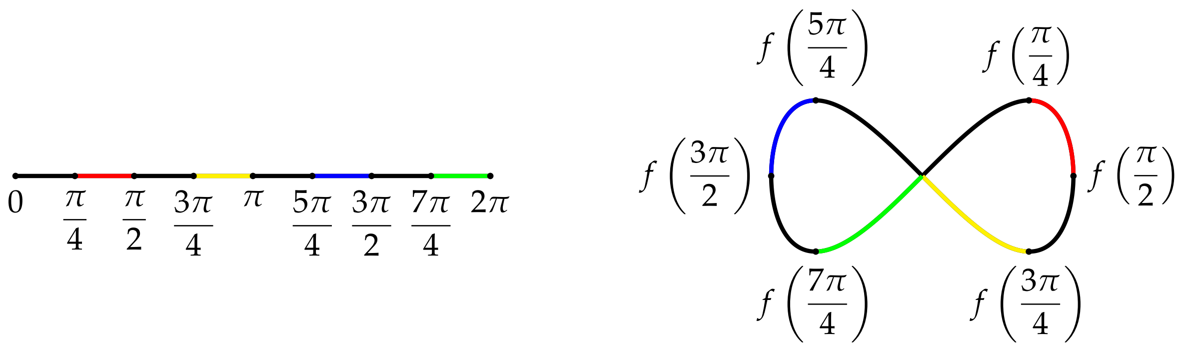
a. Probar que si $V \subseteq U$ es un abierto, entonces $(V, \phi|_V)$ es una carta compatible de M.
b. Probar que si $f : \phi(U) \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ es un difeomorfismo, $(U, f \circ \phi)$ es una carta compatible de M.

7 Sea M una variedad diferencial de dimensión d.

a. Probar que M admite un atlas $\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ tal que para todo $i \in I$ se tiene que $\phi_i(U_i)$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$.
b. Probar que M admite un atlas $\mathscr{B} = \{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ tal que para todo $j \in J$ se tiene que $\psi_j(V_i) = \mathbb{R}^d$.

8 Considerar en $\mathbb{R}$ las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, \phi)$ donde $\phi(t) = t^3$. Probar que las dos cartas no son compatibles pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.

9 Sea M la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ donde $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ con la estructura inducida por la carta (M, f^{-1}). Probar que la función $F : M \to M$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.



10 Probar que $SO_3(\mathbb{R})$ es difeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

11 Probar que $\mathbb{R}$ y S^1 son las únicas variedades diferenciales conexas de dimensión 1 salvo difeomorfismo.

Construcción de variedades

12 **Preimagen de valor regular:** Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$ una función diferenciable tal que $c \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de F (es decir, para cada punto $x \in U$ con $F(x) = c$ el rango de $\mathrm{D}F(x)$ es m). Probar que $M = F^{-1}(c)$ es una variedad de dimensión $n - m$ y la inclusión $M \hookrightarrow U$ es diferenciable.

13 **Producto cartesiano:** Sean M y N variedades diferenciales.

a. Probar que el producto cartesiano $M \times N$ es naturalmente una variedad diferencial con $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$ y que las proyecciones canónicas $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ son diferenciables.

b. El producto de variedades diferenciales está caracterizado por la siguiente *propiedad universal*: Si P es una variedad diferencial junto con funciones diferenciables $p_1 : P \to M, p_2 : P \to N$ entonces existe una única función diferenciable $f : P \to M \times N$ tal que $\pi_1 \circ f = p_1$ y $\pi_2 \circ f = p_2$.

14 **Pegado de variedades:** Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia numerable de variedades diferenciales, todas de dimensión n. Supongamos que para cada par $i \neq j$ están dados: dos abiertos $U_{ij} \subseteq M_i$ y $U_{ji} \subseteq M_j$, y un difeomorfismo $f_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ que no puede extenderse continuamente a ningún punto de ∂U_{ij}, tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

- $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$.
- $f_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.
- $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferencial M y morfismos $\psi_i : M_i \to M$ tales que ψ_i es un difeomorfismo entre M_i y un abierto de M y

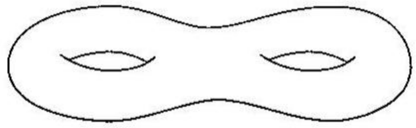
a. los abiertos $\psi_i(M_i)$ cubren M,
b. $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(M_i) \cap \psi_j(M_j)$,
c. $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ en U_{ij}.

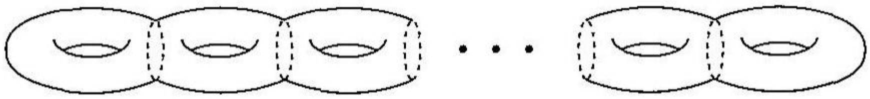
15 **Suma conexa de variedades:** Sean M y N dos variedades conexas de la misma dimensión d. Se consideran cartas (U,ϕ) y (V,ψ) de M y N respectivamente tales que $\phi(U)=\psi(V)=B(0,1)$ y pongamos $p=\phi^{-1}(0)$ y $q=\psi^{-1}(0)$. Definimos una nueva variedad $M\#N$ como el pegado de $M\smallsetminus\{p\}$ y $N\smallsetminus\{q\}$ por los abiertos U y V a través del difeomorfismo $f:U\to V$ determinado por la ecuación

$$\psi f\phi^{-1}(x)=\frac{1-\|x\|}{\|x\|}x \ \ \forall x\in B(0,1)\smallsetminus\{0\}.$$

La variedad $M\#N$ se llama la suma conexa de M y N. Convencerse de que esta construcción no depende de las cartas utilizadas.
Probar que $M\#S^d$ es difeomorfa a M y que la operación # es conmutativa y asociativa.

Observación: Se puede probar que cualquier variedad compacta de dimensión 2 es difeomorfa a la esfera S^2, a la suma de n toros $T\#\cdots\#T$ o a la suma de n planos proyectivos $\mathbb{P}(\mathbb{R})^2\#\cdots\#\mathbb{P}(\mathbb{R})^2$. Es más, estas variedades no son homeomorfas entre sí.





16 **Cociente por la acción de un grupo:** Sea M una variedad diferencial y G un grupo que actúa en M por difeomorfismos: para cada $g\in G$ se tiene $\phi_g:M\to M$ difeomorfismo de modo que $\phi_{1_G}=1_M$ y $\phi_g\phi_h=\phi_{gh}$. Supongamos además que la acción es propiamente discontinua (es decir, todo $p\in M$ está contenido en un abierto U tal que $\phi_g(U)\cap U=\varnothing$ para todo $g\neq 1_G$) y para todos $p,q\in M$ en distintas órbitas existen abiertos U y V que los contienen respectivamente tales que $\phi_g(U)\cap V=\varnothing$ para todo $g\in G$.

- **a.** Probar que el conjunto de órbitas M/G es una variedad diferencial con la estructura inducida por M, la proyección canónica $M\to M/G$ es diferenciable y $\dim(M)=\dim(M/G)$.
- **b.** Expresar el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y el toro n-dimensional T_n como cocientes S^n/G y $\mathbb{R}^n/H$ para grupos y acciones convenientes.

Álgebras de funciones

17 Probar que $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})=\{f:M\to\mathbb{R}:f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si $g:M\to N$ es diferenciable, entonces $g^*:\mathscr{C}^\infty(N,\mathbb{R})\to\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ es un morfismo de anillos.

18 Dadas M y N variedades diferenciales compactas, probar que:

- **a.** Los ideales maximales de $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ son de la forma
$$\mathfrak{m}_p=\{f\in\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}):f(p)=0\}.$$
- **b.** Todo morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathscr{C}^\infty(N,\mathbb{R})\to\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ viene de una función diferenciable $M\to N$.

Observación: Por **a.** podemos recuperar la variedad M como conjunto a partir de $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, por **b.** también recuperamos su estructura diferenciable. ¿Qué pasa si M y N no son compactas? ¿Vale **b.** si sólo pedimos morfismo de anillos?

19 Probar que el conjunto $\mathscr{D}_p(M)$ de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de un punto $p \in M$ es un anillo y si $g : M \to N$ es diferenciable entonces $g^* : \mathscr{D}_{g(p)}(N) \to \mathscr{D}_p(M)$ es un morfismo de anillos.

20 Dado $p \in M$ probar que la aplicación cociente $f \mapsto \overline{f}$ da un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})/\mathfrak{m}_p^0 \to \mathscr{D}_p(M)$$

donde $\mathfrak{m}_p^0 = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : f \text{ se anula en un entorno de } p\}$.

Observación: Las $\mathbb{R}$-álgebras $\mathscr{D}_p(M)$ son anillos locales cuyo único ideal maximal son los gérmenes de funciones que se anulan en p. Más aún, $\mathscr{D}_p(M)$ es la localización de $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ en el complemento del ideal maximal $\mathfrak{m}_p$.