

FLUJOS, CAMPOS Y UN TEOREMA DE EHRESMANN

IGNACIO DARAGO

RESUMEN. El objetivo de estas notas es desarrollar la teoría de flujos y curvas integrales. Esta teoría nos permite dar una interpretación geométrica del corchete de Lie y nos permite a su vez probar el teorema de la fibración de Ehresmann.

1. CURVAS INTEGRALES Y FLUJOS

Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente. Podemos pensar en M como si fuera un río y X la corriente de agua en M . Si soltamos una partícula en el medio del río, la corriente la arrastrará describiendo una trayectoria como en la figura 1.

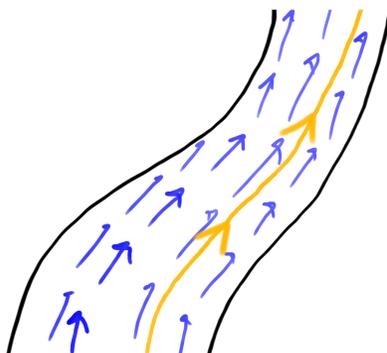


FIGURA 1. La trayectoria de una partícula arrastrada por el río.

Sea $\gamma : I \rightarrow M$ la curva que describe esa trayectoria. En cada punto, la velocidad instantánea de la partícula debe ser precisamente la velocidad con la que el río se está moviendo. Es decir, γ debe cumplir la ecuación

$$\gamma'(t) = d_t \gamma \left(\frac{d}{dt} \right) = X_{\gamma(t)}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente. Una *curva integral* $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva tal que

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$$

para cada punto $t \in I$.

Ahora bien, estudiemos el problema localmente. Podemos suponer sin pérdida de la generalidad (achicando el intervalo I si es necesario) que existe una carta (U, ϕ) de M tal que $\gamma : I \rightarrow U$. En ese caso, si $\phi \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es la representación de la curva en coordenadas, tenemos que

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Por otra parte, si la representación de X en coordenadas es

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_p$$

donde X_1, \dots, X_n son funciones diferenciables en U , se sigue que γ es una curva integrable si y sólo si se satisface la ecuación diferencial $\gamma'_i(t) = X_i(\gamma(t))$ para cada $t \in I$. Estamos en condiciones de probar la siguiente

Proposición 1.2. *Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente. Para cada punto $p \in M$ existe $\varepsilon > 0$ y una curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que es una curva integral de X que comienza en p (es decir, $\gamma(0) = p$).*

Demostración. Tomemos una carta (U, ϕ) de un entorno de p como en la discusión anterior. Por el teorema de Picard-Lindelof, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \gamma'_i(t) = (X_i \circ \phi^{-1})(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ \gamma_i(0) = \phi_i(p) \end{cases}$$

posee una solución $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \phi(U)$. La curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ definida por $\gamma(t) = \phi^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ es una curva integral para M . ■

Observación 1.3. Notemos que si $\gamma : I \rightarrow M$ y $\eta : J \rightarrow M$ son dos curvas integrales para un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ con $\gamma(0) = \eta(0) = p$ entonces $\gamma|_{I \cap J} = \eta|_{I \cap J}$. En efecto, veamos que el conjunto $\{t \in I \cap J : \gamma(t) = \eta(t)\}$ es abierto y cerrado. Claramente es cerrado por continuidad. Si $t_0 \in I \cap J$ es tal que $\gamma(t_0) = \eta(t_0)$, tomamos una carta alrededor de ese punto y observamos que las coordenadas de γ y η en esa carta son soluciones al mismo problema de valores iniciales con la misma condición inicial. Por la unicidad de solución, γ y η coinciden en un entorno de t_0 y se sigue lo deseado.

Definición 1.4. Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente sobre M . Una curva integral $\gamma : I \rightarrow M$ que empieza en $\gamma(0) = p$ es *maximal* si para cualquier curva integral $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M$ que empieza en $\tilde{\gamma}(0) = p$ tenemos que $\tilde{I} \subseteq I$. Diremos que un campo es *completo* si todas las curvas integrales maximales están definidas sobre todo \mathbb{R} .

Los campos completos nos permiten definir difeomorfismos en una variedad, simplemente dejando fluir un tiempo fijo. En otras palabras, sea X un campo completo sobre una variedad M y $\Phi^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ la curva integral que comienza

en $\Phi^{(p)}(0) = p$. Si definimos $\Phi_t : M \rightarrow M$ por $\Phi_t(p) = \Phi^{(p)}(t)$, obtenemos una función diferenciable gracias a la dependencia suave de los datos iniciales en el teorema de Picard-Lindelof. También es fácil verificar que $\Phi_0 = \text{id}$ y que si $t, s \in \mathbb{R}$ entonces $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$. Esto nos dice que $(\Phi_t)_t$ define un grupo uniparamétrico, es decir, un morfismo de grupos $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ dado por $t \mapsto \Phi_t$.

Por lo tanto, será importante para nosotros tener algún criterio para probar que un campo es completo.

Proposición 1.5. *Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente sobre M . Si existe un $\varepsilon > 0$ fijo tal que para todo $p \in M$ la curva integral que comienza en p está definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces X es completo.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $p \in M$ tal que el dominio de la curva integral $\Phi^{(p)}$ está acotado. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que está acotado superiormente y sea b el supremo del dominio maximal de $\Phi^{(p)}$. Tomemos algún t_0 tal que $b - \varepsilon < t_0 < b$ y sea $q = \Phi^{(p)}(t_0)$. Como $\Phi^{(q)}$ está definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, podemos considerar la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} \Phi^{(p)}(t) & \text{si } -\varepsilon < t < b \\ \Phi^{(q)}(t - t_0) & \text{si } t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

definida en $(-\varepsilon, b + \varepsilon)$. Notemos que γ está bien definida pues

$$\Phi^{(q)}(t - t_0) = \Phi_{t-t_0}(q) = \Phi_{t-t_0} \circ \Phi_{t_0}(p) = \Phi_t(p) = \Phi^{(p)}(t).$$

Claramente γ es una curva integral, comienza en p y el dominio se extiende más hacia la derecha que b . Esto prueba que el dominio de la curva integral no podía estar acotado. ■

Un corolario sencillo de esto es el siguiente.

Corolario 1.6. *Sea X un campo tangente en M tal que $\text{Sop}(X) = \overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}$ es compacto. Entonces X es completo.*

Demostración. Para cada $p \in \text{Sop}(X)$ existe un abierto $U_p \ni p$ en M y un $\varepsilon_p > 0$ de modo tal que todas las curvas integrales $\Phi^{(q)}$ están definidas en $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ para $q \in U_p$. Por la compacidad del soporte, podemos quedarnos con finitos abiertos U_{p_1}, \dots, U_{p_k} que lo cubren y tomar $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$. De este modo, toda curva integral que comience en un punto de $\text{Sop}(X)$ estará definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Por otra parte, si una curva integral comienza en un punto p fuera del soporte, debe ser constante pues $X_p = 0$ y así estará definida siempre. Aplicando la proposición 1.5 anterior, concluimos la demostración. ■

Corolario 1.7. *Todo campo en una variedad diferenciable compacta es completo.*

Demostración. El soporte de cualquier campo debe ser compacto y usamos el corolario anterior. ■

El corolario anterior se puede probar de manera esencialmente distinta (y de modo que queda como ejercicio para el lector) a través del siguiente lema.

Lema 1.8 (del escape). *Sea X un campo tangente sobre una variedad diferenciable M . Si γ es una curva integral de X cuyo dominio maximal no es todo \mathbb{R} , la imagen de γ no puede estar contenida en ningún compacto de M .*

Demostración. Supongamos que b es el supremo del dominio de la curva integral γ que empieza en $\gamma(0) = p$. Sea $K \subseteq M$ un compacto de modo tal que $\gamma([0, b)) \subseteq K$. Para cualquier sucesión creciente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, b)$ tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, la sucesión $(\gamma(t_n))_n \subseteq K$ debe admitir una subsucesión convergente a un punto $q \in M$. Tomemos un abierto U entorno de q y $\varepsilon > 0$ tal que todas las curvas integrales de X que comienzan en algún punto de U están definidas en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Para algún k suficientemente grande, $b - \varepsilon < t_{n_k} < b$ y $\gamma(t_{n_k}) \in U$. La curva definida por $\sigma : [0, t_{n_k} + \varepsilon) \rightarrow M$,

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } 0 \leq t < b \\ \Phi_{t-t_{n_k}}(\Phi_{t_{n_k}}(p)) & \text{si } t_{n_k} - \varepsilon < t < t_{n_k} + \varepsilon \end{cases}$$

es una curva integral de X que extiende a γ (pues $t_{n_k} + \varepsilon > b$). Esto es una contradicción pues b era el supremo del dominio de γ . ■

Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dicen *f -relacionados* (lo notaremos $X \sim_f Y$) si para cada $p \in M$ tenemos que $d_p f(X_p) = Y_{f(p)}$. Podemos caracterizar esta propiedad en términos de las curvas integrales.

Proposición 1.9. *Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están f -relacionados si y sólo si para cada curva integral γ de X se tiene que $f \circ \gamma$ es una curva integral de Y .*

Demostración. Si $X \sim_f Y$ tenemos que

$$(f \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) = d_{\gamma(t)} f(X_{\gamma(t)}) = Y_{(f \circ \gamma)(t)}$$

y así $f \circ \gamma$ es una curva integral de Y . Recíprocamente, supongamos que f manda curvas integrales de X en curvas integrales de Y . Dado $p \in M$, tomemos una curva integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de X comenzando en p . Como $f \circ \gamma$ es una curva integral de Y comenzando en $f(p)$ se sigue que

$$Y_{f(p)} = (f \circ \gamma)'(0) = d_p f(\gamma'(0)) = d_p f(X_p)$$

y así $X \sim_f Y$ como queríamos probar. ■

2. DERIVADA DE LIE

Sea X un campo tangente en una variedad diferenciable M . Recordemos que un campo tangente puede identificarse con una derivación en $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, es decir, una función $X : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ lineal que cumple la regla de Leibniz

$$X(fg) = fX(g) + gX(f).$$

En efecto, esto se debe a que $X_p = \text{ev}_p \circ X$ es una derivación en p y así define un elemento en T_pM .

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos tangentes. El corchete de Lie se define como

$$[X, Y] = XY - YX$$

donde pensamos a X, Y como derivaciones de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Observemos que $[X, Y]$ es un campo tangente, o en otras palabras, que el corchete $[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ es una derivación. Esto es sencillo, pues

$$\begin{aligned} (XY - YX)(fg) &= X(gY(f) + fY(g)) - Y(gX(f) + fX(g)) \\ &= X(g)Y(f) + gXY(f) + X(f)Y(g) + fXY(g) \\ &\quad - Y(g)X(f) - gYX(f) - Y(f)X(g) - gYX(f) \\ &= f(XY - YX)(g) + g(XY - YX)(f). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que si (U, ϕ) es una carta de M en la que

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial \phi_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

entonces

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^i}{\partial \phi_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \phi_j} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Veamos una interpretación geométrica del corchete de Lie. Para esto, buscamos una noción de *derivada direccional* de campos tangentes. Si X es un campo tangente en \mathbb{R}^n y $v \in T_p\mathbb{R}^n$ es un vector tangente, podemos definir

$$D_v X(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_{p+tv} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{p+tv} - X_p}{t}.$$

Es claro que en \mathbb{R}^n , la derivada $D_v X$ puede obtenerse derivando cada coordenada de $X = (X_1, \dots, X_n)$. Sin embargo, este concepto de derivada requiere fuertemente de que todos los espacios tangentes de \mathbb{R}^n pueden ser identificados con \mathbb{R}^n : en una variedad arbitraria M los vectores tangentes X_{p+tv} y X_p viven en espacios tangentes distintos. Si reemplazamos v por un campo tangente Y , podemos reemplazar $p + tv$ por el flujo $\Phi_Y^{(p)}(t)$ y de este modo identificar $T_{\Phi_Y^{(p)}(t)}M$ con T_pM a través de $d_{\Phi_Y^{(p)}(t)}\Phi_{-t}^Y$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2. Sea M una variedad diferenciable y X, Y campos tangentes en M . La *derivada de Lie* $L_Y X$ se define como

$$(L_Y X)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \Phi_{-t}^Y \left(X_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \Phi_{-t}^Y \left(X_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \right) - X_p}{t}.$$

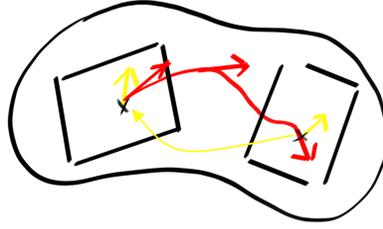


FIGURA 2. La derivada de Lie de un campo respecto de otro.

VI. Arnold se refiere a la derivada de Lie como la *derivada del pescador*: el pescador observa el río frente a él y ve cómo cambian los objetos y su posición relativa al seguir el flujo del agua.

Proposición 2.3. Sea M una variedad diferenciable y X, Y campos tangentes en M . Entonces la derivada de Lie $L_Y X$ define un campo tangente en M .

Demostración. Sea (U, ϕ) una carta en un entorno de $p \in M$. Tomemos un abierto $W \subseteq M$ y $\varepsilon > 0$ de modo tal que el flujo de Y en la región W cae en U para todo tiempo en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, o en otras palabras $\Phi_Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow U$. Esto es posible por la dependencia suave de los datos iniciales en el teorema de Picard-Lindelof. Denotamos $\phi \circ \Phi_Y(t, x) = (\Phi_1(t, x), \dots, \Phi_n(t, x))$ a las coordenadas del flujo en la carta (U, ϕ) . Usando la base de los ganchos, podemos calcular la diferencial

$$d_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \Phi_{-t}^Y \left(X_{\Phi_Y^{(p)}(t)} \right) = \sum_i^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi_j}(-t, \Phi_Y(t, x)) X_j(\Phi_Y(t, x)) \right) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Big|_x.$$

Los coeficientes son funciones diferenciables en (t, x) y derivando con respecto a t en $t = 0$ lo siguen siendo. Esto prueba que los coeficientes de $L_Y X$ en la base de los ganchos son funciones diferenciables y así es $L_Y X$ es un campo tangente. ■

Vamos a probar que $L_Y X = [Y, X]$, pero antes necesitamos un lema técnico.

Lema 2.4. Sea M una variedad diferenciable, X un campo tangente en M y $p \in M$ un punto tal que $X_p \neq 0$. Existe una carta (U, ϕ) alrededor de p tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$.

Demostración. Primero, veamos que podemos elegir una carta (V, ψ) de modo tal que $X_p = \frac{\partial}{\partial \psi_1} \Big|_p$. En efecto, tomando una carta $(V, \tilde{\psi})$, completando

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}_i} \Big|_p$$

a una base de $T_p M$ (pues $X_p \neq 0$) y tomando la matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ inversa de la matriz de los coeficientes de esa base, la carta $\psi = A \circ \tilde{\psi}$ satisface que $X_p = \frac{\partial}{\partial \psi_1} \Big|_p$. La idea será pararse en un punto $\psi^{-1}(0, t_2, \dots, t_n)$ y fluir en la dirección de X . Es decir, definimos $\tilde{\phi}$ en un entorno de 0 como

$$\tilde{\phi}(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{t_1}^X(\psi^{-1}(0, t_2, \dots, t_n)).$$

Claramente $\phi := \tilde{\phi}^{-1}$ define una carta así que calculemos el primer gancho. Para aliviar la notación, escribamos $\phi(q) = (a_1, \dots, a_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \Big|_q (f) &= \frac{\partial (f \circ \tilde{\phi})}{\partial x_1} (a_1, \dots, a_n) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \tilde{\phi}(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f \tilde{\phi}(a_1, \dots, a_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \Phi_{a_1+h}^X(\psi^{-1}(0, a_2, \dots, a_n)) - f(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \Phi_h^X \Phi_{a_1}^X(\psi^{-1}(0, a_2, \dots, a_n)) - f(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \Phi_h^X)(q) - f(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \Phi_X^{(q)})(h) - (f \Phi_X^{(q)})(0)}{h} \\ &= (f \Phi_X^{(q)})'(0) \\ &= X_q(f). \end{aligned}$$

Como queríamos probar. ■

Estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 2.5. *Sea M una variedad diferenciable y X, Y campos tangentes en M . Entonces $L_Y X = [Y, X]$.*

Demostración. Si $Y_p \neq 0$, por el lema anterior existe una carta (U, ϕ) alrededor de p con $\phi(p) = 0$ de modo que $Y = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$ en U . En estas coordenadas, se tiene que

el flujo de Y es $\Phi_Y(t, p) = \phi^{-1}(t, 0, \dots, 0)$ y así

$$\begin{aligned} (L_Y X)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\sum_{i=1}^n X_i \phi^{-1}(t, 0, \dots, 0) \left. \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right|_p \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial X_i}{\partial \phi_1} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right|_p. \end{aligned}$$

Ahora bien, es sencillo ver usando la fórmula en coordenadas del corchete de Lie que $[Y, X]_p = (L_Y X)_p$.

Ahora, si $p \in \text{Sop}(Y)$, existe una sucesión de puntos $p_n \in M$ tales que $Y_{p_n} \neq 0$ y $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ entonces por continuidad se sigue que $[Y, X]_p = (L_Y X)_p$ pues $[Y, X]_{p_n} = (L_Y X)_{p_n}$ para cada n .

Finalmente, si $p \notin \text{Sop}(Y)$ tenemos que $Y_q = 0$ para todo q en un entorno de p . Entonces, $\Phi_Y(t, q) = q$ para todo t y q cerca de p . Esto implica que $(L_Y X)_p = 0$. Por otra parte, por la expresión del corchete de Lie en coordenadas es claro que $[Y, X] = 0$ pues $Y_q = 0$ para todo q en un entorno de p . ■

3. TEOREMA DE EHRESMANN

El objetivo de esta sección es probar el teorema de Ehresmann. Diremos que una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una *fibración localmente trivial* si para cada $p \in M$ existe un entorno abierto U y un difeomorfismo

$$h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(p)$$

de modo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times f^{-1}(p) \\ & \searrow f & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

conmuta.

Teorema 3.1 (Ehresmann). *Supongamos que $f : M \rightarrow N$ es una submersión sobreyectiva y propia. Entonces f es una fibración localmente trivial.*

Para probarlo, necesitaremos un par de resultados previos.

Lema 3.2. *Sea $f : M \rightarrow N$ una submersión. Si $Y \in \mathfrak{X}(N)$ es un campo tangente dado, entonces existe un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X \sim_f Y$.*

Demostración. Tomemos un cubrimiento $(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m)$ de M por cartas y un cubrimiento $(V_\alpha, \psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n)$ de N por cartas con $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ y de modo que la expresión local de f en estas cartas sea la proyección en las primeras n coordenadas $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ pues f es una submersión. Si escribimos al campo tangente Y en coordenadas como

$$Y|_{V_\alpha} = \sum_{i=1}^n Y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_i},$$

podemos definir localmente un campo X^α en U_α por

$$X^\alpha = \sum_{i=1}^n X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

donde $X_i^\alpha = Y_i^\alpha \circ f$. Se puede verificar, por la expresión de f en las cartas, que $d_p f(X_p^\alpha) = Y_{f(p)}$. Si tomamos una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ subordinada a $\{U_\alpha\}_\alpha$, definimos un campo tangente

$$X = \sum_{\alpha} \rho_\alpha X^\alpha$$

en M . Este campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ está f -relacionado a Y pues

$$d_p f(X_p) = \sum_{\alpha} d_p f(\rho_\alpha(p) X_p^\alpha) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(p) d_p f(X_p^\alpha) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(p) Y_{f(p)} = Y_{f(p)}.$$

Esto concluye la demostración. ■

Lema 3.3. *Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable, sobreyectiva y propia. Supongamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ son dos campos tangentes f -relacionados, entonces X es completo si y sólo si Y lo es.*

Demostración. Supongamos primero que X es completo. Si $q \in N$ es un punto arbitrario y $p \in M$ es tal que $f(p) = q$, entonces $f \circ \Phi_X^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow N$ es una curva integral de Y que empieza en q , como vimos en la proposición 1.9. Esto implica que Y es completo.

Supongamos recíprocamente que Y es completo. Sea $p \in M$ y supongamos que a es una cota superior del dominio de la curva integral $\Phi_X^{(p)}$ que comienza en p . Si consideramos el compacto

$$K = \left\{ \Phi_Y^{(f(p))}(t) : t \in [0, a] \right\},$$

la imagen del intervalo $[0, a)$ por $\Phi_X^{(p)}$ está contenida en el compacto $f^{-1}(K)$ ya que tenemos $f(\Phi_X^{(p)}(t)) = \Phi_Y^{(f(p))}(t)$. Pero por el lema del escape 1.8, la curva $\Phi_X^{(p)}$ no puede tener su imagen contenida en ningún compacto pues no es completa. ■

Estamos en condiciones de probar el teorema de Ehresmann. La idea será fluir en dirección transversal a las fibras de f , en la dirección dada por un campo local en N . La figura 3 ilustra esto.

Demostración del teorema 3.1. Tomemos una carta (U, ϕ) de N y miremos la restricción $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$. Por el lema 3.2 existen campos X_1, \dots, X_n tales que

$$X_i \sim_f \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

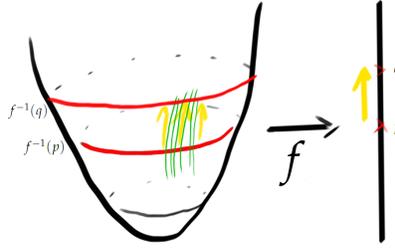


FIGURA 3. Idea de la demostración del teorema de Ehresmann.

para cada $1 \leq i \leq n$. En virtud del lema 3.3, estos campos son completos pues los ganchos lo son. Definimos una función suave $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(p)$ como

$$h(q) = \left(f(q), \Phi_{-\phi_n(f(q))}^{X_n} \cdots \Phi_{-\phi_1(f(q))}^{X_1}(q) \right)$$

cuya inversa $h^{-1} : U \times f^{-1}(p) \rightarrow f^{-1}(U)$,

$$h^{-1}(u, x) = \Phi_{\phi_1(u)}^{X_1} \cdots \Phi_{\phi_n(u)}^{X_n}(x)$$

es diferenciable. Y estamos. ■

Corolario 3.4. Si $f : M \rightarrow N$ es una submersión suryectiva y propia y N es conexo, todas las fibras $f^{-1}(p)$ son difeomorfas entre sí.

Demostración. Probemos que el conjunto

$$S_p = \{q \in N : f^{-1}(q) \text{ difeomorfo a } f^{-1}(p)\}$$

es abierto y cerrado en N . Como f es una fibración localmente trivial, para cada $p \in N$ existe un abierto U y un difeomorfismo $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(p)$ que se restringe a un difeomorfismo entre las fibras $h : f^{-1}(q) \rightarrow f^{-1}(p)$ y así $U \subseteq S_p$. Esto prueba que S_p es abierto para todo $p \in N$. Para ver que es cerrado, veamos que el complemento es abierto. Sea $q \notin S_p$. Como S_q es abierto, existe un entorno abierto U de q tal que $U \subseteq S_q$. Si hubiera algún punto $q' \in U$ tal que $q' \in S_p$, entonces la fibra $f^{-1}(q')$ sería difeomorfa a la fibra $f^{-1}(p)$. Pero la fibra $f^{-1}(q')$ es difeomorfa a la fibra $f^{-1}(q)$, de donde $f^{-1}(q)$ es difeomorfa a $f^{-1}(p)$. Esto es absurdo pues $q \notin S_p$. Por lo tanto, $U \subseteq N \setminus S_p$ y así S_p es cerrado. Esto concluye la demostración. ■

Ejemplo 3.5. Un ejemplo interesante es la *fibración de Hopf*. Tenemos una función $f : S^3 \rightarrow S^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2(x_1x_2 + x_3x_4), 2(x_1x_4 - x_2x_3), (x_1^2 + x_3^2) - (x_2^2 + x_4^2))$$

(queda como ejercicio verificar la buena definición). Claramente f es diferenciable, propia y es sencillo verificar (derivando la expresión) que f es una submersión. En particular, esto implica que f es sobreyectiva, pues la imagen de f es

cerrada (es compacta por serlo S^3) y abierta (por ser f una submersión). Por lo tanto, el teorema de Ehresmann implica que f es una fibración localmente trivial y que todas las fibras son difeomorfas entre sí. Analicemos la fibra $f^{-1}(1, 0, 0)$. Si (x_1, x_2, x_3, x_4) está en la fibra del polo norte, se deben cumplir las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 &= \frac{1}{2} \\ x_1x_4 - x_3x_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_3^2 &= \frac{1}{2} \\ x_2^2 + x_4^2 &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se desprende fácilmente de estas ecuaciones que (x_1, x_3) y $(-x_4, x_2)$ son dos vectores de la misma norma y ortogonales, lo que implica que $(-x_4, x_2) = (-x_3, x_1)$ o $(-x_4, x_2) = (x_3, -x_1)$. Pero si tuvieramos lo segundo, la primera ecuación nos diría que

$$\frac{1}{2} = x_1(-x_1) + x_3(-x_3) = -x_1^2 - x_3^2 = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la fibra consiste de los puntos de la forma

$$f^{-1}(1, 0, 0) = \{(x, x, y, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

y así es claramente difeomorfa a S^1 . Es decir, la aplicación de Hopf $f : S^3 \rightarrow S^2$ es una fibración con fibra S^1 .

El teorema de Ehresmann puede interpretarse como que las variedad diferenciables M no admiten deformaciones no triviales. En efecto, decimos que N es una *deformación* de M si existe una familia de variedades \mathcal{M} que varía suavemente y que contiene a M y N . Más precisamente N es una *deformación de M parametrizada por S* si existe una submersión sobreyectiva $\pi : \mathcal{M} \rightarrow S$ y dos puntos $s_0, s_1 \in S$ tales que $\pi^{-1}(s_0) = M$ y $\pi^{-1}(s_1) = N$. La familia de variedades \mathcal{M} consistirá en las fibras $\{\pi^{-1}(s)\}_{s \in S}$. Si además le pedimos a π que sea propia, obtendremos una familia de variedades compactas. El teorema de Ehresmann nos dice que toda deformación $\pi : \mathcal{M} \rightarrow S$ por variedades compactas es localmente trivial: es decir, no hay *moduli*.

Recordemos que una *hipersuperficie proyectiva de grado d en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$* consiste del conjunto de ceros

$$V(F) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : F(x_0 : \cdots : x_n) = 0\}$$

donde F es un polinomio homogéneo de grado d con coeficientes reales

$$F = \sum_{i_0 + \cdots + i_n = d} a_{i_0 \cdots i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} \in \mathbb{R}[X_0, \cdots, X_n].$$

Es claro que si los coeficientes difieren por un múltiplo, definen el mismo conjunto de ceros. Es decir, si $N = \binom{n+d}{n} - 1$ podemos considerar los coeficientes $(a_{i_0 \cdots i_n})_{i_0 + \cdots + i_n = d} = [a]$ como un punto en $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$. Estos parámetros (o moduli) describen el conjunto de hipersuperficies de grado d .

Diremos que una hipersuperficie $V(F)$ es *no singular* si para todo $p \in V$ tenemos que $\frac{\partial F}{\partial X_i}(p) \neq 0$ para algún i . Notemos que una hipersuperficie no singular es una subvariedad de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ de dimensión $n - 1$. En efecto, para probar que $V(F) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una subvariedad bastará con ver que en las cartas afines $U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$ se tiene que $V(F) \cap U_i$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$ de U_i . Pero esto es sencillo de verificar, pues la imagen de $V(F) \cap U_i$ por la i -ésima carta $(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ coincide con $f_i^{-1}(0)$ donde $f_i(y_1, \dots, y_n) = F(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n)$ es la deshomogeneización de F .

El teorema de Ehresmann nos permite probar que si $V(F)$ es una hipersuperficie no singular de grado d y $[a] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ son los coeficientes del polinomio F , entonces la hipersuperficie no singular de grado d que se obtiene de una pequeña variación de los parámetros $[a]$ es difeomorfa a $V(F)$. En efecto, consideremos la *familia universal* de hipersuperficies proyectivas de grado d

$$\mathcal{X} = \left\{ ([x], [a]) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{R}) : \sum_{i_0 + \cdots + i_n = d} a_{i_0 \cdots i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} = 0 \right\}$$

Si $\pi : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ es la proyección canónica, la fibra $\pi^{-1}([a])$ se identifica canónicamente con la hipersuperficie de grado d definida por

$$F_a = \sum_{i_0 + \cdots + i_n = d} a_{i_0 \cdots i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} = 0.$$

Notemos que el conjunto de puntos en $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ tal que $\pi^{-1}([a])$ es una hipersuperficie no singular es abierto en $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$. En efecto, para cada punto $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tal que $[x] \in V(F_a)$ sabemos que alguna derivada parcial $\frac{\partial F_a}{\partial X_i}(x) \neq 0$. Si vemos esto como una ecuación polinomial en (x, a) , es claro que podemos conseguir un entorno $U_{[x]}$ de $([x], [a])$ tal que $\frac{\partial F_{a'}}{\partial X_i}(x') \neq 0$ para todos $([x'], [a']) \in U_{[x]}$. Ahora bien, $\{U_{[x]} : [x] \in \pi^{-1}([a])\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\pi^{-1}([a])$ y por compacidad podemos quedarnos con un subcubrimiento finito. Esto nos dará el entorno de $[a]$ deseado.

Llamemos $S = \{[a] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{R}) : \pi^{-1}([a]) \text{ no singular}\}$ a este abierto de $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$. Entonces $\pi^{-1}(S)$ es la familia de hipersuperficies no singulares de grado d . Es fácil ver, al igual que vimos que las hipersuperficies no singulares son subvariedades, que $\pi^{-1}(S)$ es una subvariedad de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$. Como claramente es cerrado, debe ser compacto y como $\pi : \pi^{-1}(S) \rightarrow S$ es una proyección, debe ser una submersión. Por el teorema de Ehresmann, las fibras en un entorno de $[a]$ de π (que se identifican canónicamente con hipersuperficies no singulares de grado d cuyos coeficientes están cerca de $[a]$) deben ser difeomorfas entre sí y estamos.

Sin embargo, no es cierto que todas las hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sean difeomorfas entre sí. Esto se debe a que el conjunto S de puntos que parametrizan a las hipersuperficies no singulares no es conexo. Esto hace que cuando deformamos los coeficientes para ir de una hipersuperficie no singular a otra a veces tengamos que pasar por hipersuperficies singulares, y ahí se puede “quebrar”, es decir, pueden aparecer componentes conexas nuevas. Esto se ve con la familia (singular) de curvas elípticas

$$\mathcal{M} = \{((X : Y : Z), \lambda) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : ZY^2 = X^3 - Z^2X + \lambda Z^3\}.$$

La curva no-singular en $\lambda = 0$ tiene dos componentes conexas mientras que la curva no-singular en $\lambda = 1$ tiene sólo una así que no pueden ser difeomorfas. Esto se debe a que la curva en $\lambda = 2/3\sqrt{3}$ es singular, como se ve en la figura 4.

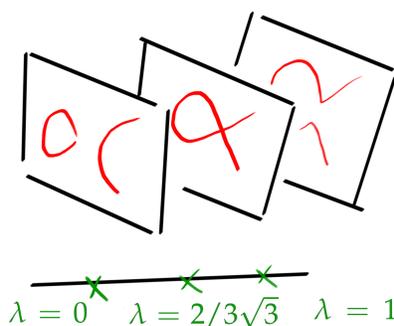


FIGURA 4. Una familia no trivial de curvas elípticas.

REFERENCIAS

- [Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.