CLASE PRÁCTICA DEL 12 DE JUNIO

IGNACIO DARAGO

1. Invarianza por homotopías

Queremos ver que si $f, g : M \to N$ son funciones suaves homotópicas (es decir, existe $H : M \times \mathbb{R} \to N$ suave con $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$) entonces los morfismos inducidos en cohomología $f^*, g^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ son iguales $f^* = g^*$.

Vamos a probar que la proyección canónica $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ induce un isomorfismo en cohomología $\pi^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M \times \mathbb{R})$. Esto no sólo nos permitirá probar la invarianza por homotopías sino también nos permitirá calcular $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n)$ más rigurosamente.

Lema 1.1 (Poincaré)**.** *Sea $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ la proyección canónica. Entonces*

$$\pi^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M \times \mathbb{R})$$

es un isomorfismo. Más aún, si $\iota_0 : M \to M \times \mathbb{R}$ es la inclusión $\iota_0(x, 0)$, entonces $\iota_0^* : H^k_{dR}(M \times \mathbb{R}) \to H^k_{dR}(M)$ es la inversa de π^*.

Demostración. Como $\pi \circ \iota_0$ es la identidad, por funtorialidad tenemos $\iota_0^* \pi^* = \mathrm{id}$. Bastará ver que $\pi^* \iota_0^*$ es la identidad en cohomología. Para eso, probaremos que

$$\pi^* \iota_0^* : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R})$$

como morfismo de complejos es homotópico a la identidad. Esto quiere decir que existe $K : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{\bullet - 1}(M \times \mathbb{R})$ de modo que

$$\mathrm{id} - \pi^* \iota_0^* = \mathrm{d}K + K\,\mathrm{d}.$$

En efecto, esto bastará pues si $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ es una forma cerrada $\mathrm{d}\omega = 0$, entonces

$$\omega - \pi^* \iota_0^*(\omega) = \mathrm{d}(K\omega) + K(\underbrace{\mathrm{d}\omega}_{=0}) = \mathrm{d}(K\omega)$$

y así $[\omega] = [\pi^* \iota_0^*(\omega)]$ son iguales en cohomología.

¿Cómo definimos el operador K? Notemos que en $M \times \mathbb{R}$ las formas diferenciables localmente son de dos tipos:

$$\begin{cases} \text{Tipo I:} & f(x,t)\pi^*\omega \\ \text{Tipo II:} & f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega \end{cases}$$

donde $f(x,t)$ es es una función suave en un abierto de $M \times \mathbb{R}$ y ω una forma en un abierto de M.

Ejercicio: ¡probar la afirmación anterior! Sugerencia: ¿cómo eran las cartas de un producto?

Luego, para definir K, bastará definirlo en formas de tipo I y II y extender por linealidad. Definimos $K : \Omega^q(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(M \times \mathbb{R})$ como

$$\begin{cases} K(f(x,t)\pi^*\omega) & = \quad 0 \\ K(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) & = \left(\int_0^t f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\pi^*\omega \end{cases}$$

y extendemos por linealidad. Verifiquemos que vale $\mathrm{id} - \pi^*\iota_0^* = \mathrm{d}K + K\,\mathrm{d}$, y por lo anterior, bastará chequearlo en formas de tipo I y II.

- *Formas de tipo I:* Primero, calculemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} - \pi^*\iota_0^*)(f(x,t)\pi^*\omega) &= f(x,t)\pi^*\omega - \pi^*\iota_0^*(f(x,t)\pi^*\omega) \\ &= f(x,t)\pi^*\omega - (\iota_0\pi)^*(f(x,t))\pi^*\underbrace{\iota_0^*\pi^*}_{=\mathrm{id}}\omega \\ &= (f(x,t) - f(\iota_0(\pi(x,t))))\pi^*\omega \\ &= (f(x,t) - f(x,0))\pi^*\omega.\end{aligned}$$

Ahora bien, por definición $K(f(x,t)\pi^*\omega) = 0$ y así $\mathrm{d}K(f(x,t)\pi^*\omega) = 0$. Finalmente, calculemos $K\,\mathrm{d}(f(x,t)\pi^*\omega)$. Para eso, notemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f(x,t)\pi^*\omega) &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\pi^*(\mathrm{d}x_i) \wedge \pi^*\omega + f(x,t)\,\mathrm{d}\pi^*\omega \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\pi^*(\mathrm{d}x_i \wedge \omega) + f(x,t)\pi^*(\mathrm{d}\omega).\end{aligned}$$

Como en la expresión, la única forma de tipo II que aparece es $\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega$, al aplicar K, todos los otros términos se desvanecen:

$$\begin{aligned}K(\mathrm{d}(f(x,t)\pi^*\omega)) &= K\left(\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega\right) \\ &= \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\pi^*\omega \\ &= (f(x,t) - f(x,0))\pi^*\omega\end{aligned}$$

y esto es lo que queríamos probar.

- *Formas de tipo II:* Calculemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} - \pi^*\iota_0^*)(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) &= f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega - (\iota_0 \circ \pi)^*(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) \\ &= f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega - f(x,0)\,\mathrm{d}\underbrace{(\iota_0 \circ \pi)^*t}_{=0} \wedge (\iota_0 \circ \pi)^*\pi^*\omega \\ &= f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega.\end{aligned}$$

Ahora bien, calculemos $\mathrm{d}(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega)$. De modo similar a la cuenta que hicimos en el ítem anterior, se obtiene que

$$\mathrm{d}(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*(\mathrm{d}x_i \wedge \omega) - f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\,\mathrm{d}\omega.$$

Ejercicio: hacer esta cuenta.

Entonces, integrando bajo el signo integral, tenemos que

$$K\,\mathrm{d}(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) = -\sum_i \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \pi^*(\mathrm{d}x_i \wedge \omega) - \left(\int_0^t f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \pi^*\,\mathrm{d}\omega.$$

Ahora, por definición, $K(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) = \left(\int_0^t f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \pi^*\omega$ y así

$$\mathrm{d}K(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) = f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^t f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \pi^*(\mathrm{d}x_i \wedge \omega) + \left(\int_0^t f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \pi^*\,\mathrm{d}\omega.$$

Esto nos permite concluir que $\mathrm{id} - \pi^*\iota_0^* = \mathrm{d}K + K\,\mathrm{d}$.

■

Observación 1.2. Notemos que en la demostración anterior, si $\iota_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ es la inclusión $\iota_1(x) = (x,1)$, entonces ι_1^* también es inversa de π^*. Sólo debemos modificar sutilmente K (Ejercicio).

Corolario 1.3.

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ } si\ k = 0 \\ 0 \text{ } si\ k > 0. \end{cases}$$

Demostración. Componemos tenemos una cadena de proyecciones

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-1} \to \cdots \to \mathbb{R}$$

que inducen isomorfismos en cohomología por el lema anterior y como conocemos la cohomología de $\mathbb{R}$, concluimos la prueba. ■

Corolario 1.4 (Invarianza homotópica)**.** *Si $f, g : M \to N$ son funciones suaves de modo que existe $H : M \times \mathbb{R} \to N$ suave con $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, entonces $f^* = g^*$ en cohomología.*

Demostración. Por la observación anterior, $\iota_0^* = \iota_1^*$ y como

$$f^* = (\iota_0 \circ H)^* = H^*\iota_0^* = H^*\iota_1^* = (\iota_1 \circ H)^* = g^*$$

concluimos lo deseado. ■

Ejercicio: Calcular la cohomología de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Observación 1.5. En realidad, lo que estamos probando es que si dos funciones son *suavemente homotópicas* entonces inducen lo mismo en cohomología, pero se puede probar que si son continuamente homotópicas (es decir, H es meramente continua) entonces también lo son suavemente. Ver teorema de aproximación de Whitney (por ejemplo, [Whi34] o [Lee13, Teorema 6.26] para una exposición más de manual).

Observación 1.6. Con este mismo tipo de téncnicas, podemos introducir un morfismo de *integración sobre las fibras* $\pi_* : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{k-1}(M)$ en cohomología de soporte compacto, definida por

$$\begin{cases} \pi_*(f(x,t)\pi^*\omega) & = \qquad 0 \\ \pi_*(f(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega) & = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\omega. \end{cases}$$

Se puede probar que π_* desciende a cohomología de soporte compacto y que allí es un isomorfismo. Se puede calcular de forma análoga la cohomología con soporte compacto de $\mathbb{R}^n$. El lector interesado puede ver el libro de Bott, Tu [BT82].

2. Teorema de de Rham

Recordemos que la homología singular de un espacio topológico M se define como

$$H_p(M, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M)}{\operatorname{im} \partial : C_{p+1}(M) \to C_p(M)}$$

donde $C_p(M)$ es el grupo abeliano libre generado por los p-símplices singulares $\sigma : \Delta_p \to M$ donde

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=0}^{p} t_i \mathbf{e}_i \ : \ 0 \le t_i \le 1, \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \right\}$$

es el p-simplex estándar y el morfismo de borde $\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M)$ consiste en $\partial(\sigma)$ la suma alternada de las caras de σ. Un elemento de $C_p(M)$ se denomina una *p-cadena singular*. Una p-cadena σ de modo que $\partial\sigma = 0$ se conoce como un *ciclo*, mientras que una cadena σ para la cual existe una $p+1$-cadena τ tal que $\sigma = \partial\tau$ se conoce como un *borde*. El p-ésimo grupo de homología singular es la homología del complejo de cadenas $C_\bullet(M)$ y mide "ciclos que no son bordes" que en algún sentido se corresponde con nuestra intuición de agujeros.

Si definimos $C_p^\infty(M)$ como el grupo abeliano libre generado por los p-símplices *suaves*, es decir, funciones $\sigma : \Delta_p \to M$ suaves, entonces tenemos un nuevo complejo de cadenas $C_\bullet^\infty(M)$. La homología de este complejo coincide con la homología singular (nuevamente, por el teorema de aproximación de Whitney), o en otras palabras, no perdemos nada en restringirnos a cadenas suaves en vez de cadenas singulares.

Recordemos la versión topológica de la sucesión de Mayer-Vietoris:

Teorema 2.1 (Mayer-Vietoris)**.** *Sea M un espacio topológico, $U, V \subseteq M$ abiertos tales que $U \cup V = M$. Tenemos una sucesión exacta larga*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_p(U\cap V) \arrow[r] & H_p(U)\oplus H_p(V) \arrow[r] & H_p(M) \arrow[dll] \\ & H_{p-1}(U\cap V) \arrow[r] & H_{p-1}(U)\oplus H_{p-1}(V) \arrow[r] & H_{p-1}(M) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demostración. Hay que probar que tenemos una sucesión exacta corta entre los complejos singulares

$$0 \to C_\bullet(U \cap V) \to C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \to C_\bullet(M) \to 0$$

(donde la primera flecha es $[c] \mapsto \left(\mathrm{inc}_*^{U\cap V, U}[c], -\mathrm{inc}_*^{U\cap V, V}[c]\right)$ y la segunda es $[c] \mapsto \mathrm{inc}_*^{U,M}[c] + \mathrm{inc}_*^{V,M}[c]$) y aplicar el lema de la serpiente. Lo dificil es probar la sobreyectividad de la última flecha, para lo que hay que hacer subdivisión baricéntrica. Ver [Spa81] para una referencia. ■

Definimos el p-ésimo grupo de *cohomología singular* como

$$H^p(M, \mathbb{R}) := \mathrm{Hom}(H_p(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}).$$

Comentario: no es la definición usual, con la definición que viene de dualizar el complejo de cadenas y mirar la homología del complejo dual, necesitamos el teorema de coeficientes universales para probar la equivalencia con esta definición.

Recordemos que podemos integrar una p-forma ω sobre una p-cadena suave $c = \sum_{i=1}^r c_i \sigma_i$ como

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^r c_i \int_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^r c_i \int_{\Delta_p} \sigma_i^* \omega.$$

Además, vale el teorema de Stokes en cadenas, es decir

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Tenemos un *pairing*

$$H_p(M, \mathbb{Z}) \times H^p_{dR}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega.$$

Esto está bien definido pues si c, c' son dos cadenas homólogas, existe b tal que $c - c' = \partial b$ y por Stokes,

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b \mathrm{d}\omega = 0$$

mientras que si ω, ω' son dos formas cohomólogas, existe η tal que $\omega - \omega' = \mathrm{d}\eta$ y así

$$\int_c \omega - \int_c \omega' = \int_c \omega - \omega' = \int_c \mathrm{d}\eta = \int_{\partial c} \eta = 0.$$

Bajo este pairing, el teorema de Stokes simplemente dice que ∂ y d son "adjuntos", es decir $\langle [c], \mathrm{d}[\omega] \rangle = \langle \partial [c], [\omega] \rangle$.

Como el pairing es bilineal, induce un morfismo

$$H^p_{dR}(M) \to \mathrm{Hom}(H_p(M,\mathbb{Z}),\mathbb{R}) = H^p(M,\mathbb{R}), \quad [\omega] \mapsto \langle \cdot, [\omega]\rangle = \left([c] \mapsto \int_c \omega\right).$$

Teorema 2.2 (De Rham). *El morfismo $H^p_{dR}(M) \to H^p(M,\mathbb{R})$ inducido por el pairing es un isomorfismo.*

Demostración. La idea de la demostración será hacer un argumento inductivo: el argumento de Mayer-Vietoris. Podemos probar, apareando la sucesión de Mayer-Vietoris topológica con la sucesión de Mayer-Vietoris para formas, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_{dR}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U) \oplus H^{p+1}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U\cap V) \arrow[d] \\
H^p(U,\mathbb{R}) \oplus H^p(V,\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p(U\cap V,\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U\cup V,\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U,\mathbb{R}) \oplus H^{p+1}(V,\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U\cap V,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Ejercicio: verificar la conmutatividad... van a necesitar una descripción explícita de los morfismos de borde.

El lema de los cinco nos prueba que si el pairing induce un isomorfismo para U, V y $U \cap V$, entonces induce un isomorfismo para $U \cup V$. Esto nos permite hacer una especie de argumento inductivo.

Diremos que un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ es *bueno* si el morfismo inducido por el pairing es un isomorfismo para todas las intersecciones finitas $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r}$ de abiertos del cubrimiento. Es claro que si M posee un cubrimiento bueno finito, entonces el pairing induce un isomorfismo $H^p_{dR}(M) \to H^p(M,\mathbb{R})$, simplemente haciendo inducción en la cantidad de abiertos del cubrimiento finito y usando la idea del párrafo anterior. Diremos que M tiene la propiedad (I) si el morfismo inducido por el pairing $H^p_{dR}(M) \to H^p(M,\mathbb{R})$ es un isomorfismo.

Probemos ahora que si M admite una base $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ que es un cubrimiento bueno, entonces $H^p_{dR}(M) \to H^p(M,\mathbb{R})$ es un isomorfismo. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ una *función de desgaste* (es decir, $\rho^{-1}(-\infty, c]$ es compacto para todo $c \in \mathbb{R}$)
Ejercicio: probar que existe una función de desgaste (usar particiones de la unidad).
Definimos los conjuntos

$$A_m = \{q \in M : m \le \rho(q) \le m+1\}, \quad A'_m = \left\{q \in M : m - \frac{1}{2} < \rho(q) < m + \frac{3}{2}\right\}$$

para cada m natural. Es claro que para cada $q \in A_m$, existe un abierto U_α de la base $\mathcal{U}$ de modo que $q \in U_\alpha$ y $U_\alpha \subseteq A'_m$. Como A_m es compacto por ser ρ una función de desgaste, podemos extrar un subcubrimiento finito $\{U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}\}$ de $\mathcal{U}$ y podemos considerar su unión B_m. Como B_m admite un cubrimiento bueno finito, sabemos que el pairing induce un isomorfismo en B_m. Ahora bien, como B_k sólo interseca a B_l si $|k-l| \le 1$, se sigue que los conjuntos B_m para m par son disjuntos y también son disjuntos para m impar. Luego,

$$U = \bigcup_{m \text{ par}} B_m, \quad V = \bigcup_{m \text{ impar}} B_m$$

son uniones disjuntas de abiertos que tienen la propiedad (I) y así U y V deben tenerla. Además su intersección $U \cap V$ es la unión disjunta de abiertos $B_m \cap B_{m+1}$, que pueden ser cubiertos por finitos abiertos de la base $\mathcal{U}$ y así tienen la propiedad (I). Como $U, V, U \cap V$ tienen la propiedad (I), se sigue que $M = U \cup V$ también.

Sólo resta ver que toda variedad M admite una base que es un cubrimiento bueno. Una forma posible para eso es equipar a M de una métrica riemanniana y tomar un cubrimiento por abiertos geodésicamente convexos. Esto concluye la prueba. ∎

Observación 2.3. La naturaleza "dual" entre cadenas y formas (vinculadas por la integración) nos da una relación de dualidad entre la homología y la cohomología. Es decir, no es caprichoso estudiar tanto homología como cohomología y no elegir "un lado al que apunten las flechas", sino que tienen avatares y razones de ser distintas en algún sentido.

Observación 2.4. Como la cohomología singular es un objeto de caracter puramente topológico, el teorema de de Rham nos dice que la cohomología de de Rham no puede ver más allá de la topología. Es decir, la cohomología de de Rham no nos permitirá distinguir entre dos espacios homeomorfos con distinta estructura diferenciable.

Con la misma técnica, podemos probar el teorema de Dualidad de Poincaré. La idea es totalmente análoga, construimos un pairing

$$H^k_{dR}(M) \times H^{n-k}_c(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

que está bien definido porque el producto exterior contra una forma de soporte compacto tiene soporte compacto y por el teorema de Stokes. Este pairing induce, al igual que el otro, un morfismo

$$H^k_{dR}(M) \to H^{n-k}_c(M)^*, \quad [\omega] \mapsto \left([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \right).$$

Teorema 2.5 (Dualidad de Poincaré)**.** *El morfismo $H^p_{dR}(M) \to H^{n-k}_c(M)^*$ inducido por el pairing es un isomorfismo.*

Demostración. La idea es exactamente la misma que para el teorema anterior. Podemos aparear las sucesiones de Mayer-Vietoris para formas y para formas con soporte compacto (ver Ejercicio 20 Práctica 7) y obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^p_{dR}(U)\oplus H^p_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_{dR}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U)\oplus H^{p+1}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_{dR}(U\cap V) \arrow[d] \\
H^{n-p}_c(U)^*\oplus H^{n-p}_c(V)^* \arrow[r] & H^{n-p}_c(U\cap V)^* \arrow[r] & H^{n-p-1}_c(U\cup V)^* \arrow[r] & H^{n-p-1}_c(U)^*\oplus H^{n-p-1}(V)^* \arrow[r] & H^{n-p-1}_c(U\cap V)^*
\end{tikzcd}$$

y nuevamente el lema de los cinco nos dice que si el morfismo inducido por el pairing es un isomorfismo para U, V y $U\cap V$, entonces lo es para $U\cup V$. ¿Se animan a terminarlo? ■

REFERENCIAS

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[Spa81] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Corrected reprint.

[Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Whi34] Hassler Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36(1):63–89, 1934.