

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2017

---

## Práctica N° 1: Aritmética de Punto Flotante.

**Ejercicio 1** Demostrar que:

a)  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$  ( $x \rightarrow 0$ )

b)  $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$  ( $x \rightarrow 0$ )

**Ejercicio 2 Algunos experimentos:** Realizar las siguientes operaciones en `Octave`. Comparar el resultado esperado con el obtenido. (Notamos  $\varepsilon$  al épsilon de la máquina. Puede obtenerse con el comando `eps`).

a) Tomando  $p = 10^{34}$ ,  $q = 1$ , calcular  $p + q - p$ .

b) Tomando  $p = 100$ ,  $q = 10^{-15}$ , calcular  $(p + q) + q$  y  $((p + q) + q) + q$ . Comparar con  $p + 2q$  y con  $p + 3q$  respectivamente.

c)  $0.1+0.2 == 0.3$

d)  $0.1+0.3 == 0.4$

e) Estimar el valor de  $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$  para  $x$  cercano a 0. Graficar  $f$  en el intervalo  $I = [-4e - 8, 4e - 8]$ . ¿Qué sucede?

f)  $\frac{\varepsilon}{2}$

g)  $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}$

h)  $1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$

i)  $((1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}) - 1$

j)  $(1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})) - 1$

k)  $\operatorname{sen}(10^j \pi)$  para  $1 \leq j \leq 25$ .

l)  $\operatorname{sen}(\pi/2 + \pi 10^j)$  para  $1 \leq j \leq 25$ .

**Ejercicio 3** Utilizando el método de redondeo, hallar el número de máquina más próximo a 129 y a 128.75 si se trabaja con base 10 y mantisa de 2 dígitos.

a) Verificar, para  $x = 128.75$ , la conocida cota para el error relativo

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq \varepsilon$$

si  $\varepsilon = 1/2\beta^{1-d}$  donde  $\beta$  es la base y  $d$  la longitud de la mantisa.

b) ¿Cuánto vale  $\left| \frac{129 - 128.75 - fl(fl(129) - fl(128.75))}{129 - 128.75} \right|$ ?

c) Repetir los cálculos utilizando el método de redondeo con base 2 y mantisa de 8 dígitos. Recordar que la escritura en base 2 de estos números es  $129 = (10000001)_2$  y  $128.75 = (10000000.11)_2$ .

**Ejercicio 4** a) Sean  $a$  y  $b$  dos números de máquina. Demostrar que el error relativo que se comete al calcular  $a^2b$  con aritmética de punto flotante se puede acotar por  $2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ , donde  $\varepsilon$  es el épsilon de máquina asociado a una aritmética de punto flotante.

b) Demostrar que si en cambio  $a, b \in \mathbb{R}$  son dos números reales arbitrarios, entonces dicho error se puede acotar por  $5\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ .

**Ejercicio 5** Hallar una forma de calcular sin pérdida de dígitos significativos las siguientes cantidades, para  $x \sim 0$ :

a)  $(\alpha + x)^n - \alpha^n$

b)  $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x}$

c)  $\cos x - 1$

d)  $\text{sen}(\alpha + x) - \text{sen}(\alpha)$

**Ejercicio 6** Hallar la raíz menor en módulo de la ecuación

$$x^2 - 40x + 0.25 = 0,$$

utilizando aritmética de 4 dígitos y comparar con el resultado obtenido utilizando aritmética exacta. Calcular el error relativo y asegurarse de comprender de dónde viene la pérdida de dígitos significativos. ¿Se le ocurre cómo calcular con mayor precisión dicha raíz? ¿Cuál es el error relativo con el nuevo método?

**Ejercicio 7** Se pretende calcular las sumas  $S_N = \sum_{k=1}^N a_k$  con  $N \in \mathbb{N}$ . Llamemos  $\widehat{S}_N$  al valor calculado que se obtiene haciendo  $fl(\widehat{S}_{N-1} + a_N)$ . Dada  $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ , mostrar que  $\widehat{S}_N$  se estaciona a partir de algún  $N$  suficientemente grande. Deducir que a partir de entonces  $S_N \neq \widehat{S}_N$ .

**Ejercicio 8** Escribir un programa que reciba como input o bien una función  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  y un número  $N$ , o bien un vector  $f$  (de longitud  $N$ ) y calcule, término a término, la suma:

$$\sum_{k=0}^N f(k).$$

**Ejercicio 9** Recordemos la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$G_N = \sum_{k=0}^N r^k = \frac{(1 - r^{N+1})}{1 - r} = Q_N$$

donde  $r < 1$ .

Tomar un  $r$  próximo a 1 (por ejemplo  $r = 1 - 10^{-14}$ ), y un  $N$  grande. Calcular el valor de  $G_N$  con el programa del ejercicio anterior. Comparar con el valor de  $Q_N$ . ¿Cuál de los dos valores obtenidos es más confiable? Analizar.

**Ejercicio 10** El desarrollo de Taylor de la función  $e^x$  proporciona una forma muy inestable de calcular este valor cuando  $x$  es negativo. Utilizar el programa del Ejercicio 8 para evaluar el desarrollo de Taylor hasta grado  $n$  de la función  $e^x$  en  $x = -12$ , para  $n = 1, \dots, 100$ . Comparar con el valor exacto: 0.000006144212353328210... ¿Cuáles son las principales fuentes de error? Proponer un método alternativo para estimar  $e^{-12}$ . Verificar si la aproximación obtenida es mejor.

**Ejercicio 11 Aproximación de la derivada de una función:**

- a) Llamamos derivada discreta de  $f$  en  $x = 1$  al valor

$$d_h f(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Utilizando el desarrollo de Taylor, demostrar que

$$|f'(1) - d_h f(1)| \leq |f''(1)| \frac{h}{2} + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

siempre que  $f$  sea suficientemente derivable.

- b) Considerar la función  $f(x) = x^2$ . Hacer un programa en `Octave` que calcule los valores de  $d_h f(1)$  para aproximar  $f'(1)$ , dándole a  $h$  los valores  $10^{-18}$ ,  $10^{-17.9}$ ,  $10^{-17.8}$ , ...,  $10^{-1}$  y grafique los resultados obtenidos. Decidir si estos se contradicen con el resultado del ítem anterior. Hacer un análisis de los cálculos efectuados para calcular  $d_h f(1)$ , teniendo en cuenta que la máquina utiliza aritmética de punto flotante.
- c) Repetir el ítem anterior, dándole otros valores a  $h$ , de modo que el resultado sea más confiable.
- d) Repetir el análisis anterior para la siguiente aproximación de  $f'$ :

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

conocida como diferencia centrada y comparar.

- e) Repetir el ítem anterior con  $f(x) = x^3$ . Analice el error de la aproximación. ¿Cuál es ahora el mejor valor de  $h$ ?

**Ejercicio 12** Escribir en `Octave` una función `redondeo(n, d)` que redondee el número decimal  $n$  a una expresión de  $d$  dígitos. Repetir el ejercicio 6 utilizando esta función.