Elementos de Cálculo Numérico (M) / Cálculo Numérico (F)

Primer Parcialito Octave - 24/4/2017 - Turno Tarde

Es sabido que en la Luna, al no haber atmósfera, dos objetos cualesquiera que caen desde una misma altura y con igual velocidad inicial tocan la superficie al mismo tiempo (en una filmación de la misión Apolo XV lo verifican con una pluma y un martillo).

Así, si se deja caer sin impulso (dentro de su campo gravitatorio) cualquier objeto en $t = 0$, la altura $y(t)$ (en m) en función del tiempo (en s) estará dada por la solución de

$$\ddot{y}(t) = -g_L, \qquad y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = 0,$$

donde $g_L = 1.624\frac{m}{s^2}$ es la gravedad en la superficie lunar (aproximadamente). Es inmediato verificar que la solución es

$$y(t) = y_0 - \tfrac{g_L}{2}t^2.$$

Pero según la Ley de gravitación universal de Newton g_L varía con la altura según $g_L(y) = \frac{G\cdot m_L}{(r_L+y)^2}$, siendo $G = 6.674 \times 10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$ la constante de gravitación universal, $m_L = 7.342 \times 10^{22}kg$ la masa de la Luna y $r_L = 1.737 \times 10^6 m$ su radio medio. Y luego la ecuación puede reexpresarse como el sistema

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= -\frac{G\cdot m_L}{(r_L+y(t))^2} \\ \dot{y}(t) &= v(t) \end{cases} \qquad v(0) = 0, y(0) = y_0,$$

en el que $v(t)$ da la velocidad en función del tiempo.

Consigna:

- Escribir una función `c_libre` en Octave que reciba como input la altura inicial y_0 y que:
  - Construya un vector de tiempos t y mediante el método de Euler vaya aproximando la evolución de la altura y y la velocidad v a lo largo del tiempo. Este proceso debe detenerse cuando el objeto alcance la superficie lunar (es decir, cuando la altura y deje de ser positiva). Se sugiere usar como paso $h = 0.001$ (es decir, no hace falta que sea un argumento de la función).
  - Calcule y guarde en un vector $y.alt$ las alturas aproximadas —para cada tiempo del vector t— que se obtienen mediante la fórmula que surge al tomar g_L constante; luego para cada valor de t compute el error absoluto de $y.alt$ respecto de y ($|y.alt(t) - y(t)|$) y guarde el máximo de estos valores (e^*).
  - **Devuelva** los vectores t, y, v y el valor e^*.
- Usando `c_libre` escribir un programa `gr_precision` que calcule la máxima altura inicial y_0^* para la cual la fórmula aproximada difiera menos de $0.01m = 1cm$. (O, alternativamente, hacer una función que devuelva y_0^* en función de un error dado en metros como argumento de aquella). Se sugiere probar con valores iniciales de $1m$ a $100m$, a intervalos de $1m$, o si resulta muy lento de a $2m$ o de a $5m$.

Se sugiere también realizar gráficos (en otro script) en función de t para v y para y e $y.alt$ (estos en el mismo gráfico, preferentemente), para verificar que las soluciones se comportan de la manera esperada y que el valor y_0^* obtenido es razonable.

Entrega: Los archivos generados (la función `c_libre`, el script o función `gr_precision` y el script de prueba, si es que fue implementado) deben enviarse adjuntos en un mail dirigido a `ecn.octave@gmail.com`, usando como asunto *Nombre y Apellido + LU*.