SEPARACIÓN DE VARIABLES EN UN CUADRADO Y ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN

ARIEL M. SALORT

1. Ecuación de Laplace

Queremos buscar una solución del siguiente problema sobre $D = (0,\pi) \times (0,\pi)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en } D \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,\pi) = 0 \\ u(\pi,y) = 0 \\ u(0,y) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sobre la función f no asumimos nada. Luego, dependiendo del tipo de regularidad que querramos que tenga la solución, vamos a pedirle a f que cumpla ciertas condiciones.

Observar que si sobre el borde del cuadrado tuviéramos $u(x,0) = f_1(x)$, $u(x,\pi) = f_2(x)$, $u(\pi,y) = f_3(y)$, $u(0,y) = f_4(y)$, utilizando el principio de superposición, la solución se escribirá como la suma de cuatro soluciones de problemas del tipo (1.1) correspondientes a dejar una sola función y poner cero en las demás.

Por solución clásica de esta ecuación entendemos que $u \in C^2(D) \cap C([0,\pi] \times [0,\pi])$ y u resuelve (1.1).

Busquemos una solución no nula separando variables. Proponemos una solución de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Este planteo se va a poder hacer solo para ciertas configuraciones del dominio (rectángulos, circunferencias o anillos, entre otras).

Entonces,

$$0 = \Delta u = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y).$$

Consecuentemente, agrupando las funciones que dependen de la misma variable obtenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

para alguna constante λ, ya que cada uno de los términos depende exclusivamente de una sola variable. Quedan determinadas las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad \text{en } (0,\pi) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \qquad \text{en } (0,\pi). \end{cases}$$

Por otro lado $u(\pi,y) = 0$ nos dice que $X(\pi)Y(y) = 0$ para todo $y \in (0,\pi)$, de donde sigue que $X(\pi) = 0$. Similarmente tenemos que $X(0) = 0$ y que $Y(\pi) = 0$. Quedan así las siguientes dos ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{en } (0,\pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \quad \text{en } (0,\pi). \\ Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos primero la que involucra a la función X pues tenemos más información de lo que ocurre en el borde. Su polinomio característico es $P(w) = w^2 - \lambda$, por lo que las raíces son $w = \pm\sqrt{\lambda}$.

Si $\underline{\lambda > 0}$ se obtiene que $w = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. De $X(0) = 0$ obtenemos que $c_1 = -c_2$. De $X(\pi) = 0$ obtenemos que $c_1(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0$, y así $c_1 = 0$ (ya que la resta de las exponenciales es un número no nulo). Obtuvimos de esta manera que $X(x) \equiv 0$. No nos sirve.

Si $\underline{\lambda = 0}$ se obtiene que $X''(x) = 0$ de donde $X'(x) = c_1$ y $X(x) = c_1 x + c_2$. Ahora, $X(0) = 0 = c_2$ y $X(\pi) = 0 = c_1\pi$, lo que da de nuevo $X(x) \equiv 0$. No nos sirve.

El único caso donde hay soluciones no triviales es cuando $\underline{\lambda < 0}$. En ese caso las soluciones se escriben de la forma

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

para ciertas constantes c_1 y c_2.

Consideramos las condiciones de borde: de $0 = X(0)$ obtenemos que $c_1 = 0$, por lo que al aplicar $0 = X(\pi)$ obtenemos

$$0 = c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi).$$

La solución será no trivial si $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$, esto es, $\sqrt{-\lambda} = k$ para $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\lambda_k = -k^2$. Las soluciones son de la forma

$$X_k(x) = \sin(kx) \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ahora pasamos a revolver la otra ecuación. Sabemos que debe ser $\lambda = \lambda_k = -k^2$, por lo que la ecuación de Y se convierte en

$$\begin{cases} Y''(y) - k^2 Y(y) = 0 & \text{en } (0,\pi). \\ Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

El polinomio característico ahora es $P_k(w) = w^2 - k^2$, y las soluciones vienen dadas por

$$Y_k(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}$$

para ciertas constantes c_1 y c_2. Considerando la condición de contorno vemos que

$$0 = Y_k(\pi) = c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi}$$

y entonces

$$c_2 = -c_1 e^{2k\pi}.$$

Por lo tanto

$$Y_k(y) = c_1 e^{k\pi} - c_1 e^{2k\pi} e^{-k\pi} = 2c_1 e^{k\pi} \frac{e^{k(y-\pi)} - e^{-k(y-\pi)}}{2} = \tilde{c_1} \sinh(k(y-\pi)).$$

Obtuvimos que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$u_k(x,y) = X_k(x) Y_k(y) = \sin(kx)\sinh(k(y-\pi))$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{en } D \\ u_k(x,\pi) = 0 \\ u_k(\pi,y) = 0 \\ u_k(0,y) = 0. \end{cases}$$

Como queremos una solución de (1.1) proponemos una combinación lineal infinita de la forma

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)\sinh(k(y-\pi))$$

donde los coeficientes c_k los elegimos de manera de que

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(-k\pi)\sin(kx).$$

Para ello debemos escribir a f en serie de senos. Si f es impar (i.e., $f(x) = -f(-x)$) esto es posible. En caso contrario consideramos la extensión impar de f:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

(obviamente $\tilde{f}|_{[0,\pi]} = f$). Si la serie asociada a $\tilde{f}$ es

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

entonces

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)dx = 0, \quad \pi b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

De esta manera, debemos pedir que $b_k = c_k \sinh(-k\pi))$. Finalmente, “la” solución del problema (1.1) será

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sinh(-k\pi))} \sin(kx)\sinh(k(y-\pi)) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y).$$

(Puede probarse que esa es la única solución de (1.1).)

1.1. **Convergencia y continuidad de la solución.** Veamos que si la función f es integrable entonces la serie infinita converge uniformemente en $(y_0, \pi]$ donde $0 < y_0 < \pi$ es arbitrario. Para ello utilizaremos el test M de Weierestrass comparandola con alguna serie numérica conveniente que converja. Pidamos que $\underline{f \in L^1([0,\pi])}$. En este caso los coeficientes de Fourier están acotados:

$$|b_k| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(x)| dx = \frac{2}{\pi} \|f\|_1.$$

Veamos que esto implica que los sumandos de u están acotados. Como el sinh es impar, tenemos que

$$|u_k(x,y)| \leq |a_k| \left| \frac{\sinh(k(\pi - y))}{\sinh(k\pi))} \right| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \left| \frac{\sinh(k(\pi - y))}{\sinh(k\pi))} \right|$$

y además

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sinh(k(\pi - y))}{\sinh(k\pi))} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{2}(e^{k(\pi-y)} - e^{-k(\pi-y)})}{\frac{1}{2}(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} \right| = \frac{e^{k(\pi-y)}}{e^{k\pi}} \left| \frac{1 - e^{-2k(\pi-y)}}{1 - e^{-2k\pi}} \right| \\ &= e^{-ky} \frac{1 - e^{-2k(\pi-y)}}{1 - e^{-2k\pi}} \leq e^{-ky_0} \end{aligned}$$

pues $e^{-ky} \leq c^{-ky_0}$ para $y_0 > 0$, y $-e^{-2k(\pi-y)} \leq -e^{-2k\pi}$ pues $1 \leq e^{2ky}$.

Consecuentemente,

$$|u_k(x,y)| \leq \frac{1}{\pi} \|\bar{f}\|_1 e^{-ky_0} = Ce^{-ky_0}.$$

Ahora hacemos uso del <u>test M</u> (recordemos que este criterio da la convergencia uniforme de una serie infinita: si $|f_k| \leq M_k$ para todo k, con M_k constantes positivas, entonces si $\sum M_k$ converge, tenemos que $\sum f_k$ converge uniformemente. En particular si las f_k son continuas, la serie converge a una función continua).

Como

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ky_0} = \sum_{k=1}^{N} (e^{-y_0})^k < \infty$$

podemos afirmar que la solución u que encontramos es continua y converge uniformemente en $[0,\pi] \times (y_0, \pi]$, y como $0 < y_0$ es arbitrario, lo es en $[0,\pi] \times (0,\pi]$. Es más, en ese mismo intervalo, como los u_k son funciones continuas, también lo será u.

1.2. **Diferenciabilidad de la solución.** Para ver esto tenemos que estudiar la convergencia de las sumas asociadas a u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy} en $[0,\pi] \times (0,\pi]$. Veamos que ocurre para $u_x(x,y)$. Derivando término a término obtenemos

$$u_x(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka_k}{\sinh(-k\pi))} \cos(kx) \sinh(k(y-\pi)) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,y).$$

Similarmente al caso anterior tenemos que para $y \geq y_0 > 0$

$$|v_k(x,y)| \leq k|a_k| \left| \frac{\sinh(k(\pi - y))}{\sinh(k\pi)} \right| \leq Cke^{-ky_0}.$$

Como $\sum ke^{-ky_0} < \infty$, existe una $g \in C([0,\pi] \times (y_0, \pi])$ tal que

$$u_x(x,y) \to g(x,y) \text{ uniformemente en } [0,\pi] \times (y_0,\pi].$$

Por otro lado vimos que la suma de $u(x,y)$ converge uniformemente en $[0,\pi] \times (y_0,\pi]$. Luego existe u_x y $u_x = g$ en $[0,\pi] \times (y_0,\pi]$.

De manera similar se prueba que las sumas asociadas a las derivadas u_y, u_{xy}, u_{yx} y u_{yy} convergen uniformemente en $[0,\pi] \times (y_0,\pi]$. De ahí deducimos que la solución $u \in C^2([0,\pi] \times (y_0,\pi])$. Como la elección del y_0 es arbitraria tenemos que

$$u \in C^2([0,\pi] \times (0,\pi]).$$

1.3. **Convergencia L^2 de la solución.** Veamos que si $\underline{f \in L^2([0,\pi])}$ entonces $u(x,y) \to f(x)$ en $L^2([0,\pi])$ si $y \to 0$. Es decir, tenemos convergencia hasta el borde en norma L^2. Hemos dicho antes que que

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sinh(-k\pi))} \sinh(k(y-\pi)) \sin(kx)$$

y

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

entonces la ortogonalidad (o igualdad de Parceval, i.e., si $f = \sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ entonces $\|f\|_2^2 = \sum a_k^2 + b_k^2$) nos dice que

$$\begin{aligned}
\|u(.,y) - f\|_{L^2([-\pi,\pi])}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \left(\frac{\sinh(k(y-\pi))}{\sinh(-k\pi)} - 1 \right) \right\|_{L^2([-\pi,\pi])}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{M-1} b_k^2 \left(\frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right)^2 + \sum_{k=M}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right)^2,
\end{aligned}$$

donde M es un entero positivo.

♠ Acotamos la segunda suma utilizando el hecho que $\sum_{k=M}^{\infty} a_k^2$ es tan chico como querramos a partir de cierto valor M, por ser la cola de una serie convergente; junto con el hecho de que el paréntesis que está elevado al cuadrado está acotado.

La primera afirmación sigue de que f es de cuadrado integrable (por estar en L^2). La desigualdad de Bessel nos asegura que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$$

entonces dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que la cola de la serie se acota

$$\sum_{k=M}^{\infty} b_k^2 \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

La segunda afirmación sigue de

$$\left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right| \leq \left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} \right| + 1 \leq e^{-ky} + 1 \leq 1 + 1 = C.$$

Consecuentemente, la segunda suma está acotada por

$$\sum_{k=M}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right)^2 \leq C \sum_{k=M}^{\infty} b_k^2 \leq C\epsilon.$$

♠ Veamos que también está acotada la primera suma. Para ello encontramos una cota para cada k fijo, y como los sumandos son una cantidad finita (pues M lo es), la suma puede ser acotada.

Observemos que para $1 \leq k \leq M$ fijo tenemos que

$$\left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right| \to 0, \quad \text{si } y \to 0,$$

por lo tanto para cada $1 \leq k \leq M$ existe un δ_k tal que si $|y| < \delta_k$ se cumple

$$\left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right| < \sqrt{\epsilon}.$$

Tomando $\delta = \min_{1 \leq k \leq M-1} \delta_k$ y $|y| \leq \delta$ tenemos que

$$\left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{para } 1 \leq k \leq M-1$$

y así

$$\sum_{k=1}^{M-1} b_k^2 \left| \frac{\sinh(k(\pi-y))}{\sinh(k\pi)} - 1 \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{M-1} b_k^2 \epsilon \leq \left(\frac{2}{\pi} \|f\|_{L^1([-\pi,\pi])} \right)^2 \epsilon \leq C\epsilon.$$

Juntando las desigualdades para las dos sumas sigue que

$$\|u(.,y) - f\|_2 \leq C\epsilon \quad \text{si } |y| \leq \delta$$

y así

$$u(x,y) \to f(x) \text{ en } L^2([0,\pi]) \text{ cuando } y \to 0.$$

1.4. **Continuidad hasta el borde.** Finalmente, veamos que si $\underline{f' \in L^2([0,\pi])}$ con $\underline{f(0) = f(\pi) = 0}$, entonces u es continua hasta el borde

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sinh(-k\pi))} \sinh(k(y-\pi)) \sin(kx) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

y podemos acotar

$$|u_k| \leq |b_k| \left| \frac{\sinh(k(y-\pi))}{\sinh(-k\pi)} \right| \leq |b_k| e^{-2ky} \leq |b_k|.$$

Como $f' \in L^2([0,\pi])$, y $f(0) = f(\pi) = 0$, derivando término a término la serie de Fourier asociada a $\tilde{f}$, y usando la desigualdad de Bessel obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 < \infty.$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|b_k|}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

para todo (x,y) en $[0,\pi] \times [0,\pi]$ (observar que ahora y puede ser 0). Consecuentemente, por el test M, la suma de u converge uniformemente en $[0,\pi] \times [0,\pi]$ a una función continua.