Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2017

Práctica 6: Ecuación de ondas

Ejercicio 1. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la fórmula de D'Alembert.

Ejercicio 2. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejercicio 3. Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ en

$$\partial_\xi\partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 4. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 6. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\partial_t^2\phi(x,t) - \partial_x^2\phi(x,t))\,dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas

   $$u_1(x,t) = H(x-t), \quad u_2(x,t) = H(x+t)$$

   donde H es la función de Heaviside

   $$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

   son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 7. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t) = w(|x|,t),\ x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x|-t) + G(|x|+t)}{|x|}.$$

Ejercicio 8. Sea u la solución clásica de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = g & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Probar que si f y g son radiales entonces u es radial.