Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2017

Práctica 2: Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver la ecuación
$$yu_x + xu_y = 0$$
con $u(0,y) = e^{-y^2}$. ¿En que regiones del plano xy la solución está unívocamente determinada?

Ejercicio 2. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.

¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 3. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

Ejercicio 4. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 5. Sea $u(x,t)$ la solución clásica del problema
$$\begin{cases} u_t + f(x,t)u_x = \psi(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
Probar que si $x(t)$ es una solución de $\dot{x} = f(x,t)$ definida para t en un entorno de 0, sobre la trayectoria $(x(t),t)$, u se expresa como
$$u(x(t),t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(s),s)ds.$$

Ejercicio 6. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x+y)u$$
que satisface $u(0,y) = y$.

Ejercicio 7. Resolver
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \partial_i u = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} = x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 8. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = |x|^2 & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} = 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.